I хэсэг. Сургуулийн геометрийн курсийн үндсэн асуудлууд.

Планиметр.

1. Гурвалжны тэнцүүгийн шинжүүд.

1) Хэрвээ гурвалжны хоёр тал ба хоорондох өнцөг нь өөр гурвалжны хоёр тал хоорондох өнцөгтэй нь харгалзан тэнцүү бол энэ хоёр гурвалжин тэнцүү.
2) Хэрвээ гурвалжны нэг тал түүнд налсан хоёр өнцөг нь өөр гурвалжны нэг тал түүнд налсан хоёр өнцөгтэй харгалзан тэнцүү бол энэ хоёр гурвалжин тэнцүү.
3) Хэрвээ гурвалжны гурван тал өөр гурвалжны гурван талтай харгалзан тэнцүү бол энэ хоёр гурвалжин тэнцүү.

2. Адил хажуут гурвалжны үндсэн шинж чанарууд.

1) Адил хажуут гурвалжны суурийн өнцгүүд тэнцүү.
2) Адил хажуут гурвалжны оройгоос суурьт татсан медиан нь өндөр болоод биссектрис болно.
3) Хэрвээ гурвалжны хоёр өнцөг тэнцүү бол энэ гурвалжин адил хажуут.
4) Хэрвээ гурвалжны медиан нь түүний өндөр болдог бол энэ гурвалжин адил хажуут.
5) Хэрвээ гурвалжны биссектрис нь мөн түүний өндөр болдог бол энэ гурвалжин адил хажуут.
6) Хэрвээ гурвалжны медиан нь мөн түүний биссектрис болдог бол энэ гурвалжин адил хажуут.

3. Хэрчмийн төгсгөлүүдээс ижил зайд алслагдсан цэгүүдийн геометр байр нь энэ хэрчмийн дундажийг дайрсан,түүнд перпендикуляр шулуун болно.(Хэрчмийн дундаж перпендикуляр)

4. Параллель шулуунуудын шинж,чанарууд

1) **Параллелийн аксиом.** Өгөгдсөн цэгийг дайруулан өгөгдсөн шулуунтай параллель шулуун нэгээс олонгүйг татаж болно.
2) Хэрэв хоёр шулууныг гурав дахь шулуунаар огтлоход үүсэх дотоод өрөөл өнцгүүд тэнцүү бол анхны хоёр шулуун параллель байна.
3) Хэрэв хоёр шулуун гуравдахь шулуунтай параллель бол өөр хоорондоо ч параллель.
4) Хэрэв хоёр шулуун гуравдахь шулуунтай перпендикуляр бол өөр хоорондоо параллель.
5) Хэрэв параллель хоёр шулууныг гурав дахь шулуунаар огтолбол үүсэх дотоод өрөөл өнцгүүд тэнцүү.

5. Гурвалжны өнцгүүдийн нийлбэрийн тухай теорем ба түүнээс гарах мөрдлөгөө

1) Гурвалжны дотоод өнцгүүдийн нийлбэр 180^0-тай тэнцүү.
2) Гурвалжны гадаад өнцөг нь түүнтэй хамар биш дотоод хоёр өнцгүүдийн нийлбэртэй тэнцүү.
3) Гүдгэр n өнцөгтийн дотоод өнцгүүдийн нийлбэр $180^0 \cdot (n-2)$-тай тэнцүү.
4) n өнцөгтийн гадаад өнцгүүдийн нийлбэр 360^0-тай тэнцүү.
5) Огтлолцсон хоёр шулууны хоорондох өнцгүүд хоёул хурц,эсвэл хоёул мохоо бол эдгээр шулуунууд перпендикуляр байна.

6. ABC гурвалжны B ба C өнцгийн биссектрисууд M цэгт огтлолцдог бол
$\measuredangle BMC = 90^0 + \measuredangle \frac{A}{2}$

7. Хамар өнцгүүдийн биссектрисуудын хоорондох өнцөг 90^0 .

8. Огтлолцсон шулуунуудын хоорондох өнцгүүдийн биссектрисүүд хоорондоо перпендикуляр.

9. Тэгш өнцөгт гурвалжны тэнцүүгийн шинжүүд

1) Хоёр катетаар
2) Катет ба гипотенузаар
3) Гипотенуз ба хурц өнцгөөр
4) Катет ба хурц өнцгөөр

10. Өнцгийн талуудаас ижил зайд алслагдсан,өнцгийн дотоод цэгүүдийн геометр байр нь энэ өнцгийн биссектрис болно.

11. Тэгш өнцөгт гурвалжны 30^0-ийн өнцгийн эсрэг орших катет гипотенузын хагастай тэнцүү.

12. Хэрэв тэгш өнцөгт гурвалжны катет, гипотенузын хагастай тэнцүү бол тэр катетын эсрэг орших өнцөг 30^0.

13. Гурвалжны тэнцэл биш. Гурвалжны хоёр талын нийлбэр гурав дахь талаас их байна.

14. Гурвалжны тэнцэл бишийн мөрдлөгөө.Тахир шугамын эхлэлийн цэг ба төгсгөлийн цэгийг холбосон хэрчим нь тахир шугамаас бага урт

15. Гурвалжны их өнцгийн эсрэг их тал оршино.

16. Гурвалжны их талын эсрэг их өнцөг оршино.

17. Тэгш өнцөгт гурвалжны гипотенуз,катетаас их урттай.

18. Цэгээс шулуунд перпендикуляр хэрчим ба налуу хэрчим татав.

1) Перпендикуляр нь налуугаас бага.
2) Их налууд их проекц харгалзана.Их проекцд их налуу харгалзана.

19. Параллелограмм.Эсрэг талууд нь хоорондоо параллель дөрвөн өнцөгтийг параллелограмм гэнэ.

Параллелограммын шинж,чанарууд.

1) Параллелограммын диагональ түүнийг хоёр тэнцүү гурвалжинд хуваана.
2) Параллелограммын эсрэг талууд хоорондоо тэнцүү.
3) Параллелограммын эсрэг өнцгүүд хоорондоо тэнцүү.
4) Параллелограммын диогоналууд огтлолцлын цэгээрээ хагаслан хуваагдана.
5) Дөрвөн өнцөгтийн эсрэг талууд хоорондоо тэнцүү бол энэ дөрвөн өнцөгт- параллелограмм
6) Дөрвөн өнцөгтийн эсрэг талууд хоорондоо параллель ба тэнцүү бол энэ дөрвөн өнцөгт- параллелограмм
7) Хэрэв дөрвөн өнцөгтийн диагоналууд огтлолцлын цэгээрээ хагаслан хуваагддаг энэ дөрвөн өнцөгт- параллелограмм

20. Тэгш өнцөгт. Тэгш өнцөгтэй параллелограммыг тэгш өнцөгт гэнэ.

Тэгш өнцөгтийн шинж,чанарууд.

1) Тэгш өнцөгтийн диогоналууд тэнцүү.
2) Параллелограммын диогоналууд тэнцүү бол энэ параллелограмм-тэгш өнцөгт.

21. Ромб. Бүх талууд нь тэнцүү дөрвөн өнцөгтийг ромб гэнэ.

Ромбын шинж,чанарууд

1) Ромбын диогоналууд перпендикуляр.
2) Ромбын диогоналууд түүний өнцгүүдийг тэнцүү хуваана.

3) Параллелограммын диогоналууд перпендикуляр бол энэ параллелограмм-ромб
4) Параллелограммын диогонууд түүний өнцгүүдийг тэнцүү хуваадаг бол энэ параллелограмм-ромб

22. Квадрат. Бүх талууд нь тэнцүү тэгш өнцөгтийг квадрат гэнэ.
23. Өгөгдсөн шулуунаас ижил зайд алслагдсан цэгүүдийн геометр байр нь- праллель хоёр шулуун.
24. Фалесын теорем. Өнцгийн нэг тал дээр тэнцүү урттай хэрчмүүд тэмдэглэж тэдгээрийн төгслүүдийг дайруулан өнцгийн нөгөө талыг огтлох праллель шулууныд татахад тэр талд мөн тэнцүү урттай хэрчмүүд үүснэ.
25. Гурвалжны дундаж шугам. Гурвалжны хоёр талын дундажыг холбосон хэрчмийг гурвалжны дундаж шугам гэнэ.
Гурвалжны дундаж шугамын тухай теорем. Гурвалжны дундаж шугам нь гурвалжны талд параллель бөгөд түүний хагастай тэнцэнэ.
26. Дөрвөн өнцөгтийн талуудын дундажын чанар.
Дурын дөрвөн өнцөгтийн талуудын дундаж цэгүүд параллелограммын оройн цэгүүд болно.
27. Гурвалжны медианы тухай теорем. Гурвалжны медианууд нэг цэгт огтлолцох ба огтлолцын цэгээрээ оройгоос тооцоход $2:1$ харьцаанд хуваагдана.
28. а)Хэрэв гурвалжны медиан татагдсан талынхаа хагастай тэнцүү бол энэ гурвалжин-тэгш өнцөгт гурвалжин.
б)Тэгш өнцөгт гурвалжны тэгш өнцгийн оройгоос татсан медиан гипотенузын хагастай тэнцэнэ.
29. Трапец. Зөвхөн хоёр эсрэг тал нь параллель сууриуд дөрвөн өнцөгтийг трапец гэнэ.Трапецийн параллельбус хоёр талын хажуу талууд дундажыг холбосон хэрчмийг трапецийн дундаж шугам гэнэ.
Трапецийн дундаж шугамын тухай теорем. Трапецийн дундаж шугам нь сууриудтай параллель бөгөөд тэдгээрийн нийлбэрийн хагастай тэнцэнэ.
30. Трапецийн диогоналуудын дундажыг холбосон хэрчим сууриудын ялгаварын хагастай тэнцэнэ.
31. Хажуу талууд нь тэнцүү трапецийг адил хажуут гэнэ.
Адил хажуут трапецийн шинж,чанарууд.
1) Адил хажуут трапецийн суурь дахь өнцгүүд тэнцүү.
2) Адил хажуут трапецийн диогоналууд тэнцүү.
3) Хэрэв трапецийн суурь дахь өнцгүүд тэнцүү бол энэ трапец адил хажуут.
4) Хэрэв трапецийн диогоналууд тэнцүү бол энэ трапец адил хажуут.
5) Адил хажуут трапецийн хажуу талын,суурь дээрх проеку нь сууриудын ялгаварын хагастай тэнцүү.Харин диогоналын проеку нь сууриудын нийлбэрийн хагастай тэнцэнэ.

32. Тойрог. Өгөгдсөн цэг тойргийн төвөөс ижил зайд алслагдсан хавтгайн цэгүүдийн геометр байрыг тойрог гэнэ.
Тойргийн шинж ,чанарууд.
1) Хөвчид перпендикуляр диаметр түүнийг хагаслан хуваана.
2) Диаметр болдоггүй хөвчийн дундажыг дайрсан диаметр түүнд перпендикуляр.
3) Хөвчийн дундаж перпендикуляр тойргийн төвийг дайрна.
4) Тойргийн төвөөс ижил зайтай хөвчүүд тэнцүү.
5) Тэнцүү хөвчүүд тойргийн төвөөс ижил зайтай.
6) Тойрог өөрийнхөө дурын диаметрийн хуувьд тэгш хэмтэй.
7) Паралель хөвчүүдийн хоорондох нумууд тэнцэнэ.
8) Хоёр хөвчийн аль их нь тойргийн төвд илүү ойрхон.

9) Тойргийн хамгийн их урттай хөвч нь диаметр.

33. Тойргийн гайхамшигт шинж. AB хэрчим тэгш өнцгөөр харагддаг M цэгүүдийн геометр байр нь ($\measuredangle AMB = 90^0$) AB диаметртэй (A ба B цэгүүдийг агуулаагүй) тойрог болно.

34. AB хэрчим хурц өнцгөөр харагддаг M цэгүүдийн геометр байр нь ($\measuredangle AMB < 90^\circ$) AB диаметртэй (AB хэрчмийн цэгүүдийг агуулаагүй) тойргийн дотор болно.

35. AB хэрчим мохоо өнцгөөр харагддаг M цэгүүдийн геометр байр нь ($\measuredangle AMB > 90^\circ$) AB диаметртэй (AB хэрчим орохгүй) тойргийн гадна хэсэг болно.

36. Гурвалжны талуудын дундаж перпендикулярын чанар.
Гурвалжны талуудын дундаж перпендикулярууд нэг цэгт огтлолцох ба тэр нь уг гурвалжны багтаасан тойргийн төв болно.

37. Огтлолцсон хоёр тойргийн төвүүдийг холбосон хэрчим тэдгээрийн ерөнхий хөвчид перпендикуляр.

38. Тэгш өнцөгт гурвалжныг багтаасан тойргийн төв гипотенузын дундаж болно.

39. Гурвалжны өндрүүдийн тухай теорем. Гурвалжны өндрүүдийг агуулсан шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно.

40. Тойргийн шүргэгч. Тойрогтой цор ганц ерөнхий цэгтэй шулууныг тойргийн шүргэгч гэнэ.

1) Шүргэгч нь шүргэлтийн цэгт татсан радиуст перпендикуляр.
2) Тойргийн цэгийг дайрсан l шулуун энэ цэгт татсан радиуст перпендикуляр бол l –шүргэгч шулуун.
3) M цэгийг дайрсан шулуунууд тойргийг A, B цэгүүдэд шүргэдэг бол $MA = MB$.
4) Өнцөгт багтсан тойргийн төв энэ өнцгийн биссектрис дээр оршино.
5) **Гурвалжны биссектрисийн тухай теорем**. Гурвалжны биссектрисууд нэг цэгт огтлолцох ба тэр нь гурвалжинд багтсан тойргйин төв болно.

41. a, b катетуудтай, c гипотенузтай тэгш өнцөгт гурвалжинд багтсан тойргийн радиус $\dfrac{a+b-c}{2}$ -тай тэнцүү.

42. ABC гурвалжинд багтсан тойрог AC талыг M цэгт шүргэдэг бол $AM = p - BC$ байна.Энд p -гурвалжны периметрийн хагас.

43. ABC гурвалжны BC тал ба AB, AC талуудын үргэлжлэлийг шүргэсэн тойрог өгөгдөв. A оройгоос AB шулууныг шүргэх цэг хүртлэх зай нь ABC гурвалжны хагас периметртэй тэнцэнэ.

44. ABC гурвалжинд багтсан тойрог AB, BC ба AC талуудыг харгалзан K, L ба M цэгүүдээр шүргэнэ.Хэрэв $\measuredangle BAC = \alpha$ бол $\measuredangle KLM = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$

45. r ба R (R>r) радиустай тойргууд өгөгдөв. Тэдгээрийн төвүүдийн хоорондох зай a (a>R+r) бол гадаад болон дотоод ерөнхий шүргэгч хэрчмүүд нь харгалзан $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$ ба $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$ урттай.

46. Хэрвээ дөрвөн өнцөгтөд тойрог багтааж болдог бол түүний эсрэг талуудын нийлбэр тэнцэнэ.

47. Шүргэлцсэн тойргууд. Нэг ерөнхий цэгтэй (шүргэгчтэй цэг.)хоёр тойргийг шүргэлцсэн тойргууд гэнэ.

1) Шүргэлцсэн хоёр тойргийн шүргэлтийн цэг тэдний төвийн шугам (төвүүдийг дайрсан шулуун) дээр оршино.

2) O_1 ба O_2 төвтэй r ба R радиустай тойргууд гадаад байдлаар шүргэлцсэн байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $R+r==O_1O_2$ байх явдал юм.
3) O_1 ба O_2 төвтэй r ба R ($r<R$) радиустай тойргууд дотоод байдлаар шүргэлцсэн байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь
4) $R-r=O_1O_2$ байх явдал юм.
5) О ба О төвтэй тойргууд К цэгээр, гадаад байдлаар шүргэлцэнэ.Эдгээр тойргуудыг ялгаатай А ба В цэгүүдээр шүргэх шулуун К-г дайрсан ерөнхий шүргэгчийг С цэгээр огтлоно.Тэгвэл $\measuredangle AKB=90^0$ ба $\measuredangle O_1CO_2=90^0$.

48. Тойрог, өнцөг.
1) Тойргийн нумын өнцгөн хэмжээ түүнд тулсан төв өнцөгтэй тэнцүү.
2) Багтсан өнцөг тулсан нумынхаа өнцгөн хэмжээний хагастай тэнцүү.
3) Огтлолцсон хөвчүүдийн хоорондох өнцөг,хөвчүүдээр хашигдсан эсрэг нумуудын [өнцгөн хэмжээний?] нийлбэрийн хагастай тэнцүү.
4) Хоёр огтлогчийн хоорондох өнцөг тэдгээрээр хашигдсан нумуудын ялгаварын хагастай тэнцүү.
5) Шүргэгч ба хөвчийн хоорондох өнцөг тэдгээрээр хашигдсан нумын хагастай тэнцүү.

49. Нэг нумд тулсан багтсан өнцгүүд тэнцүү.

50. Өгөгдсөн хэрчим,өгөгдсөн өнцгөөр харагддаг цэгүүдийн геометр байр нь тэнцүү тойргуудын хоёр нум болно.(Эдгээр нумуудын төгсгөлийн цэгүүд орохгүй.)

51. Хэрэв дөрвөн өнцөгт тойрогт багтдаг бол түүний эсрэг өнцгүүдийн нийлбэр 180^0-тай тэнцэнэ.

52. Хэрэв дөрвөн өнцөгтийн эсрэг өнцгүүдийн нийлбэр 180^0-тай тэнцүү бол түүнийг тойрогт багтааж болно.

53. Хэрэв трапецд тойрог багтдаг бол тойргийн төвөөс трапецын хажуу тал тэгш өнцгөөр харагдана.

54. M цэг AB хэрчим дээр оршино. $AM:BM=a:b$ бол $AM:AB=a:(a+b)$, $BM:AB=b:(a+b)$.

55. Пропорциональ хэрчмүүдийн тухай теорем.Өнцгийн талуудийг огтолдог параллель шулуунууд тэдгээрийг пропорциональ хэрчмүүдээр огтолно.

56. Төсөө.Төсөөгийн шинжүүд.
1) Гурвалжны хоёр тал өөр гурвалжны хоёр талтай харгалзан пропорциональ бөгөөд талуудын хоорондох өнцгүүд тэнцүү бол энэ хоёр гурвалжин төсөөтэй.
2) Гурвалжны хоёр өнцөг өөр гурвалжны хоёр өнцөгтэй харгалзан тэнцүү бол эдгээр гурвалжнууд төсөөтэй.
3) Гурвалжны гурван тал өөр гурвалжны гурван талтай харгалзан пропорциональ бол эдгээр гурвалжнууд төсөөтэй.

57. Төсөөтэй дүрсүүдийн харгалзан шугаман елементүүдийн харьцаа төсөөгийн коеффициенттэй тэнцүү.

58. Трапецийн гайхамшигт шинж. Трапецийн хажуу талуудын үргэлжлэлүүдийн огтлолцлын цэг,сууриудын дундажууд болон диогоналуудын огтлолцолын цэг нэг шулуун дээр оршино.

59. Гурвалжны биссектрисийн чанар. Гурвалжны биссектрис нь буусан талаа нөгөө хоёр талд пропорциональ хэрчмүүдэд хуваана.

60. Өгөгдсөн гурвалжны өндөр ба буусан талын үржвэр тогтмол.

61. BM ба CN нь ABC гурвалжны өндрүүд $\left(\measuredangle A \neq 90^\circ\right)$ бол AMN гурвалжин ABC гурвалжинтай төсөөтэй бөгөөд төсөөгийн коеффициент нь $\left|\cos\measuredangle A\right|$-тай тэнцэнэ.

62. Тойргийн AB ба CD хөвчүүд E цэгээр огтлолцоно. Тэгвэл $|AE|\cdot|EB| = |CE|\cdot|ED|$ байна.(ө.х. E цэгээр огтлолцох AB , CD хөвчийн хэрчмүүдийн үржвэрүүд тэнцүү.)

63. Огтлогч, шүргэгчийн теорем ба түүнээс гарах мөрдлөгөө.

1) Нэг цэгээс тойрогт татсан огтлогч ба шүргэгчийн хувьд огтлогчийн уртыг түүний гадаад хэрчмийн уртаар үржсэн нь шүргэгч хэрчмийн квадраттай тэнцэнэ.
2) Өгөгдсөн цэгээс өгөгдсөн тойрогт татсан огтлогчийн уртыг түүний гадаад хэрчмийн уртаар үржсэн үржвэр тогтмол.

64. Тэгш өнцөгт гурвалжны тригонометрийн хамаарал.

1) Тэгш өнцөгт гурвалжны катет,түүний эсрэг орших өнцгийн синусийг эсвэл түүнд налсан өнцгийн косинусийг гипотенузаар үржсэнтэй тэнцүү.
2) Тэгш өнцөгт гурвалжны катет,түүний эсрэг орших өнцгийн тангенсийг эсвэл түүнд налсан өнцгийн котангенсийг нөгөө катетаар үржсэнтэй тэнцүү.

65. Пифагорын теорем. Тэгш өнцөгт гурвалжны гипотенузын квадрат нь катетуудын квадратуудын нийлбэртэй тэнцүү.

66. Пифагорын урвуу теорем. Гурвалжны нэг талын квадрат нөгөө хоёр талын талын квадратуудын нийлбэртэй тэнцүү бол энэ гурвалжин-тэгш өнцөгт гурвалжин.

67. Тэгш өнцөгт гурвалжны дундаж пропорциональ.
Тэгш өнцөгт гурвалжны тэгш өнцгийн оройгоос татсан өндөр нь катетуудын гипотенуз дээрх проекцуудын дундаж пропорциональ бөгөөд катет бүр нь гипотенуз ба гипотенуз дээрх өөрийн проекцийн дундаж пропорциональ болно.

68. Хэрвээ трапецэд тойрог багтааж болдог бол уг тойргийн радиус нь хажуу талын шүргэлтийн цэгээр хуваагдсан хэрчмүүдийн дундаж пропорциональ байна.

69. Шүргэлцсэн хоёр тойргийн гадаад ерөнхий шүргэгчид нь тэдгээрээр хашигдсан дотоод ерөнхий шүргэгч хэрчимтэй тэнцүү бөгөөд эдгээрийн урт нь тойргуудын радиусуудын геометр дунджаас хоёр дахин их.(ө.х $2\cdot\sqrt{R\cdot r}$)

70. Гурвалжны метрик шүтэлцээ.

1) **Косинусын теорем**. Гурвалжны талын квадрат нь нөгөө хоёр талын, квадратуудын нийлбэрээс тэдгээрийн үржвэрийг хоёр дахин авсаныг хоорондох өнцгийн нь косинусаар үржсэнийг хассантай тэнцэнэ.
2) **Косинусын теоремын мөрдлөгөө**. Параллелограммын диогоналуудын квадратуудын нийлбэр түүний бүх талуудын квадратуудын нийлбэртэй тэнцэнэ.
3) **Гурвалжны медианы томьёо**. c талд татсан медиан m бол $m = \dfrac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}$, энд a ба b -гурвалжны нөгөө талууд.
4) **Синусын теорем**. Гурвалжны талууд эсрэ орших өнцгийнхөө синусуудтай пропорциональ.
5) **Синусын өргөтгөсөн теорем**. Гурвалжны талууг эсрэг орших өнцгийн нь синуст харьцуулсан харьцаа,энэ гурвалжны багтаасан тойргийн диаметртэй тэнцэнэ.

71. Гурвалжны талбайн томьёонууд.

1) Гурвалжны талбай,талыг түүнд буусан өндрөөр үржсэний хагастай тэнцүү.
2) Гурвалжны талбай,хоёр талын үржвэрийг хоорондох өнцгийн нь сикусээр үржсэний хагастай тэнцүү.

3) Гурвалжны талбай,түүний хагас периметрийн багтсан тойргийн нь радиусаар үржсэнтэй тэнцүү.
4) Гурвалжны талбай,түүний талуудын үржвээрийг багтаасан тойргийн радиусыг 4 дахин авсанд хуваасантай тэнцүү.
5) Героны томьёо.

72. a**-талтай адил талт гурвалжны елементүүд**.
h, S, r, R нь a талтай адил талт гурвалжны өндөр,талбай,багтаасан ба багтсан тойргийн радиусууд болог.Тэгвэл $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ тэнцэтгэлүүд биелэнэ.

73. Параллелограммын талбайн томъёонууд.
1) Параллелограммын талбай,суурь ба өндрийн үржвэртэй тэнцүү.
2) Параллелограммын талбай,түүний хөрш талуудын үржвэрийг хоорондох өнцгийн синусаар үржсэнтэй тэнцүү.
3) Тэгш өнцөгтийн талбай,түүний хөрш талуудын үржвэртэй тэнцүү.
4) Ромбын талбай ,түүний диагоналуудын үржвэртэй тэнцүү.

74. Трапецийн талбай,сууриудын нийлбэрийн хагас ба өндрийн үржвэртэй тэнцүү.
75. Дөрвөн өнцөнтийн талбай,диогоналуудын үрцвэрийг тэдгээрийн хоорондох өнцгийн синусээр үржсэнтэй тэнцүү.
76. Төсөөтэй гурвалжнуудын талбайн харьцаа төсөөгийн коэффициентийн квадраттай тэнцүү.
77. Хэрэв олон өнцөгтөд тойрог багтдаг бол түүний талбай нь хагас периметр ба багтсан тойргийн радиусын үржвэртэй тэнцүү.
78. ABC гурвалжны BC тал дээр M цэг орших бол $\frac{S(AMB)}{S(AMC)} = \frac{BM}{CM}$.
79. ABC гурвалжны AB ба AC талууд дээр (эсвэл тэдгээрийн үргэлжлэл дээр) харгалзан P ба Q-цэгүүд орших бол $\frac{S(APQ)}{S(ABC)} = \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AQ}{AC}$
80. R радиустай тойргийн урт $2\pi R$.
81. R радиустай дугуйн талбай πR^2.

Гортиг,шугамаар байгуулах бодлогууд.

1. Гурвалжныг гурван талаар нь байгуул.
2. Өгөгдсөн өнцөгтэй тэнцүү өнцөг байгуул.
3. Гурвалжны хоёр тал ба хоорондох өнцгөөр нь байгуул.
4. Гурвалжны нэг тал ба түүнд налсан хоёр өнцгөөр нь байгуул.
5. Хэрчмийг хагаслан хуваа.
6. Өгөгдсөн цэгийг дайруулан өгөгдсөн шулуунд перпендикуляр шулуун тат.
7. Өгөгдсөн цэгийг дайруулан өгөгдсөн шулуунтай параллель шулуун тат.
8. Өгөгдсөн өнцгийн биссектрисыг байгуул.
9. Өгөгдсөн хоёр хэрчмийн нийлбэр (ялгавар)-ыг байгуул.
10. Хэрчмийг n тэнцүү хэсэгт хуваа.
11. Өгөгдсөн гурвалжны багтаасан тойрог байгуул.
12. a, b ба c хэрчмүүд өгөгдөв. $x : a = b : c$ байх x хэрчмийг байгуул.
13. Хоёр катетаар нь тэгш өнцөгт гурвалжин байгуул.
14. Катет ба гипотенузаар нь тэгш өнцөгт гурвалжин байгуул.

15. a ба b хэрчмүүд өгөгдөв. $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$, $\sqrt{ab}$ хэрчмүүдийг тус тус байгуул.
16. Гурван талын дундажуудаар гурвалжинг байгуул.
17. Өгөгдсөн өнцөгт тулсан нумыг байгуул.
18. Өгөгдсөн цэгт төвтэй өгөгдсөн цэгийг дайрсан тойрог байгуул.
19. Өгөгдсөн радиустай, өгөгдсөн хоёр цэгийг дайрсан тойрог байгуул.
20. Өгөгдсөн цэгээс өгөгдсөн тойрогт шүргэгч тат.
21. Трапецыг сууриуд ба хажуу талуудаар нь байгуул.
22. Трапецыг сууриуд ба диогоналуудаар нь байгуул
23. Гурвалжны хоёр тал ба гурав дахь талд татсан медианаар нь байгуул.
24. Өнцгийн дотор M цэг өгөдөв. M цэгийг дайруулан өнцгийн доторх хэрчим нь M цэгээр хагаслан хуваагдсан байхаар шулуун тат.
25. Гурвалжны нэг тал, эсрэг орших өнцөг болон тэр өнцгөөс буулгасан өндрөөр нь байгуул.

Стереометр

1. Стереометрийн аксиомууд

Аксиомоос шууд мөрдөн гарах чанарууд

2. Шулуун болон түүн дээр үл орших цэгийг дайруулан цор ганц хавтгай татаж болно.
3. Параллель хоёр шулууныг агуулсан цор ганц хавтгай татаж болно.
4. Өгөгдсөн шулуун дээр үл орших цэгийг дайруулан түүнд параллель шулуун цор ганцийг татаж болно.

Огторгуйн параллелийн шинжүүд

5. **Шулуун ба хавтгайн параллелийн шинж**. a шулуун α хавтгайн ямар нэг шулуунтай параллель бол a шулуун α хавтгайтай параллель.
6. α хавтгайтай параллель a шулууныг агуулсан хавтгай α-тай b шулуунаар огтлолцдог бол a ба b шулуунууд параллель.
7. Хэрэв a ба b параллель шулуунуудын a-г агуулсан хавтгай b-г агуулсан хавтгайтай огтлолцдог бол хавтгайнуудын огтлолцол шулуун a ба b шулуунуудтай параллель.
8. **Огторгуйн шулуунуудын параллелийн дамжих чанар**. a шулуун b–тэй, b шулуун c шулуунтай параллель бол a ба c шулуунууд параллель.
9. **Хавтгайнуудын параллелийн шинж**.Хавтгайн огтлолцсон хоёр шулуун өөр хавтгайн огтлолцсон хоёр шулуунтай харгалзан параллель бол эдгээр хавтгайнууд параллель.
10. Хэрэв параллель хоёр хавтгай гурав дахь хавтгайтай огтлолцдог бол огтлолцлын шулуунууд параллель.
11. **Хавтгайнуудын параллелийн дамжих чанар**. α хавтгай β-тай, β хавтгай γ хавтгайтай параллель бол α ба γ хавтгайнууд параллель.
12. Параллель хавтгайнуудын хооронд хашигдсан, параллель шулуунуудын хэрчмүүд тэнцүү.
13. Өгөгдсөн хавтгайн гадна орших цэгийг дайруулан түүнд параллель хавтгай цор ганцыг татаж болно.
14. **Параллелпипедийн талсууд ба диагоналуудын чанар**.

Параллелпипедийн эсрэг талсууд тэнцүү бөгөөд параллель.
Параллелпипедийн диагоналууд огтлолцох ба огтлолцлын цэгээрээ хагаслан хуваагдана.

15. **Тетраэдрийн медианы тухай теорем**. Тетраэдрийн медианууд (Тетраэдрийн оройг эсрэг талсын медиануудын огтлолцлын цэгтэй холбосон хэрчим) нэг цэгт огтлолцох ба огтлолцлын цэгээрээ оройгоос тооцоход 3:1 харьцаанд хуваагдана.

16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедийн AC_1 диогональ A_1BD гурвалжны медиануудын огтлолцлын цэгийг дайрах бөгөөд түүгээр A цэгээс тооцоход $1:2$ харьцаанд хуваагдана.

17. Хэрэв пирамидыг суурийн хавтгайтай нь параллель хавтгайгаар огтловол огтлолд нь суурьтай төсөөтэй өнцөгт үүснэ.

Солбисон шулуунууд.

18. Солбисон шулуунуудын шинж. a шулуун α хавтгай дээр оршино. b шулуун энэ хавтгайг a дэр оршдоггүй цэгээр огтолдог бол a ба b -солбисон шулуунууд.

19. Солбисон хоёр шулууныг тус тусд нь агуулсан цор ганц параллель хас хавтгай оршин байна.

20. Төгсгөлүүд нь харгалзан солбисон хоёр шулуун дээр орших хэрчмүүдийн дундаж цэгүүдийн геометр байр нь аль нэг хэрчмийн дундажыг дайрсан, дээрх шулуунуудтай параллель хавтгай байна.

21. Солбисон хоёр шулууныг хоорондох өнцөг (нэгтэй нь параллель ба нөгөөг нь M цэгээр огтолдог параллель шулуун ба огтлолцсон шулуун ба түүнтэй огтлолцсон шулууны хоорондох өнцөг) M цэгийн сонголтоос үл хамаарана.

22. Аливаа солбисон хоёр шулуунд цор ганц ерөнхий перпендикуляр оршин байна.(төгсгөлүүд нь эдгээр шулуунууд дээр оршдог хоёуланд нь перпендикуляр хэрчим.)

Параллель проекцлол.

23. Параллель бус проекцлолоор шулуун шулуунд бууна.

24. Параллель бус проекцлолоор параллель хоёр шулуун, эсвэл параллель хоёр шулуунд,эсвэл нэг шулуунд бууна.

25. Нэг шулун дээр буюу параллель шулуун дээр орших хэрчмүүдийн харьцаа проекцоор хадгалагдана.

26. Босоо шулуун нь хавтгайг, түүний энэ хавтгай дээрх дурын параллель проекц дээр орших цэгээр огтолно.

27. Хавтгай олон өнцөгтийн хавтгай дээрх ортогональ проекцийн талбай нь энэ олон өнцөтийн талбай ба олон өнцөгт, проекцийн хавтгайн хоорондох өнцгийн косинусын үржвэртэй тэнцэнэ.

Огторгуйн векторууд ба координат

28. Векторын координат нь энэ векторын төгсгөлийн координатаас эхлэлийн координатыг харгалзан хассан ялгавар болно.

29. $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ векторууд коллинеар байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, k -ямар нэг тоо тэнцэтгэл биелэж байх явдал мөн.

30. Гурван вектор компланар байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь тэдгээрийн нэгийг нөгөө хоёрын шугман комбинац дүрстэй илэрхийлж болох явдал юм. ($\vec{a} = x \cdot \vec{b} + y \cdot \vec{c}$,энд x, y -ямар нэг тоонууд.)

31. Аливаа векторыг компланар бус гурван вектороор цор ганц аргаар шугаман задлаж болно.

32. AB -хэрчмийн дундаж M бол $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

33. AB -хэрчмийн дундаж M ба CD хэрчмийн дундаж N бол $\overrightarrow{MN} = \dfrac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}}{2}$.

34. ABC гурвалжны медиануудын огтлолцол M бол $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$

35. $ABCD$ параллелограммын диогоналуудын огтлолцол M бол

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)}{4}.$$

36. Хэрчмийн дундажын координат, төгсгөлүүдийн координатуудын арифметик дундажтай тэнцүү.

37. Векторуудын скаляр үржвэрийн чанарууд.

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

б) $\alpha \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$

в) $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

г) $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}$

д) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^{\,2} + 2 \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) + \vec{b}^{\,2}$

е) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 \le \vec{a}^{\,2} \cdot \vec{b}^{\,2}$, $\vec{a}, \vec{b}$ векторууд коллинеар байх зөвхөн тэр үед тэнцэлдээ хүрнэ.

ж)Тэг биш $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ векторууд перпендикуляр байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь тэдгээрийн скаляр үржвэр нь тэгтэй тэнцүү байх явдал юм.

38. $A\left(x_1; y_1; z_1\right)$ ба $B\left(x_2; y_2; z_2\right)$ цэгүүдийн хоорондын зай $\sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}$ -тай тэнцүү.

39. $\vec{a}\left(x_1; y_1; z_1\right)$ ба $\vec{b}\left(x_2; y_2; z_2\right)$ тэгээс ялгаатай векторуудын хоорондох өнцөг ϕ бол

$$\cos\phi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}} \cdot \sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2} + z_2^{\,2}}}.$$

40. $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ цэгийг дайрсан, тэгээс ялгаатай $\vec{n}\left(a; b; c\right)$ векторт (нормаль вектор) перпендикуляр хавтгайн тэгшитгэл $a \cdot \left(x - x_0\right) + b \cdot \left(y - y_0\right) + c \cdot \left(z - z_0\right) = 0$.

41. $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ цэгийг дайрсан, тэгээс ялгаатай $\vec{m}\left(a; b; c\right)$ вектортой (чиглүүлэгч вектор) параллель шулууны параметрт тэгшитгэл $\begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases}$.

42. Шулууныг хоёр хавтгайн огтлолцол гэдэг утгаар дараах системээр тодорхойлно.
$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$, энд $A_i^2+B_i^2+C_i^2 \neq 0 \quad i=1,2$ ба үл мэдэгдэгчдийн харгалзах коэффициентууд пропорциональ биш.

43. $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ ба $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ тэгшитгэлтэй хавтгайнуудын хоорондох өнцөг ϕ бол $\cos\phi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

44. Хавтгайн хэрчимт тэгшитгэл. Хэрэв хавтгай координатын тэнхлэгүүдийг $A(p;0;0)$, $B(0;q;0)$ ба $C(0;0;r)$ $(p,q,r\neq 0)$ цэгүүдээр огтлодог бол түүний тэгшитгэл $\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}+\dfrac{z}{r}=1$.

45. $M_0(x_0;y_0;z_0)$ цэгээс $Ax+By+Cz+D=0$ хавтгай хүртлэх зай $\rho=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ томъёогоор бодогдоно. Шулуун ба хавтгайн перпендикуляр шинж.

Шулуун ба хавтгайн перпендикулярын шинж.

46. Шулуун ба хавтгайн перпендикулярын шинжүүр.Хэрэв шулуун хавтгайн огтлолцсон хоёр шулуунд перпендикуляр бол тэр энэ хавтгайд перпендикуляр.

47. Хэрэв хоёр шулуун нэг хавтгайд перендикуляр бол хоорондоо параллель.

48. Хэрэв параллель хоёр шулууны нэг нь хавтгайд перпендикуляр бол хоёр дахь шулуун мөн энэ хавтгайд перпендикуляр.

49. Нэг шулуунд перпендикуляр хоёр хавтгай параллель байна.

50. Шулуун ба хавтгай нь нэг шулуунд перпендикуляр бол хоорондоо параллель байна.

51. Өгөгдсөн цэгийг дайруулан өгөгдсөн шулуунд перпендикуляр хавтгай цор ганцыг татаж болно.

52. Өгөгдсөн цэгийг дайруулан өгөгдсөн хавтгайд перпендикуляр шулуун цор ганцыг татаж болно.

53. Гурван перпендикулярын тухай теорем. Хавтгай дээр орших шулуун хавтгайг огтлогч шулуунтай перпендикуляр байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь огтлогч шулууны энэ хавтгай дээрх ортогональ проекцтэй перпендикуляр байх явдал юм.

54. Хэрэв нэг цэгээс хавтгай руу перпендикуляр ба огтлогч татсан бол
а) Перпендикуляр нь огтлогчоос богино;
б) Тэнцүү огтлогчид тэнцүү ортогональ проекцтэй;
в) Урт огтлогчид урт ортогональ проекц харгалзана;
г) Ортогональ проекц нь урт байх огтлогч илүү урт байна.

55. Шулуун ба хавтгайн хоорондох өнцгийн тухай теорем.
Огтлогч ба түүний хавтгай дээрх ортогональ проекцийн хоорондох өнцөг нь энэ огтлогч болон хавтгайн дурын шулууны хоорондох өнцгөөс бага.

56. Хэрчмийн төгсгөлийн цэгүүдээс ижил зайд алслагдсан цэгүүдийн геометр байр нь энэ хэрчмийн дунджийг дайрсан түүнд перпендикуляр хавтгай болно.

57. Өгөгдсөн хавтгайгаас өгөгдсөн зайд алслагдсан цэгүүдийн геометр байр нь параллель хоёр хавтгай болно.

58. Гурвалжны оройнуудаас ижил зайд алслагдсан цэгүүдийн геометр байр нь энэ гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг дайрсан,гурвалжны хавтгайд перпендикуляр шулуун болно.
59. Хэрвээ пирамидын хажуу ирмэгүүд тэнцүү бол түүний өндөр нь суурийг багтаасан тойргийн төвийг дайрна.

Хоёр талст өнцөг.

60. Хоёр талст өнцгийн шугаман өнцөг (хоёр талст өнцгийн ирмэгт перпендикуляр хавтгайгаар огтлоход үүсэх огтлол) нь түүний ирмэг дээр авсан цэгүүдийн сонголтоос үл хамаарна.
61. Хоёр талст өнцгийн ирмэгүүдээс ижил зайд алслагдсан уг хоёр талст өнцгийн дотор орших цэгүүдийн геометр байр нь хоёр талст өнцгийн биссектор хавтгай болно.
62. Хавтгайнуудын перпендикуляр байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл.
Хоёр хавтгай перпендикуляр (тэгш хоёр талст өнцөг үүсгэнэ) байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь тэдгээрийн нэг нь нөгөөгийнхөө перпендикулярыг агуулах явдал юм.
63. Хэрвээ огтлолцсон хоёр хавтгай гурав дахь хавтгайд перпенпикуляр бол тэдгээрийн огтлолцлын шулуун нь мөн уг хавтгайд перпендикуляр байна.
64. Хэрэв гурвалжин пирамидын хажуу талсууд нь суурийн хавтгайтай тэнцүү хоёр талс өнцгүүд үүсгэдэг бол уг пирамидын өндөр нь нэг бол багтсан тойргийн төвийг дайрна, эсвэл суурийн аль нэг гадаад багтсан тойргийн төвийг дайрна.

Олон талст өнцөг.

65. Гурван талст өнцгийн хавтгайн өнцөг нь түүний өөр хоёр хавтгайн өнцгийн нийлбэрээс бага.
66. Гүдгэр олон талст өнцгийн хавтгай өнцгүүдийн нийлбэр нь 360°-аас бага.
67. Тэгш өнцөгт параллелпипедын диагоналуудын чанар.
а) Тэгш өнцөгт параллелпипедын диагоналууд тэнцүү.
б) Тэгш өнцөгт параллелпипедын диагоналийн квадрат нь ерөнхий оройтой гурван ирмэгийн квадратуудын нийлбэртэй тэнцүү.

Бөмбөрцөг.Шүргэгч хавтгай.Шүргэлцсэн бөмбөрцгүүд.

68. Бөмбөрцгийн радиусаас бага зайд бөмбөрцгийн төвөөс алслагдсан хавтгай бөмбөрцгийг тойргоор огтолно. Бөмбөрцгийн төвөөс огтлогч хавтгайд буулгасан перпендикулярын суурь нь энэ тойргийн төв болно.
69. Бөмбөрцгийн шүргэгч хавтгай нь (бөмбөрцөгтэй цор ганц ерөнхий цэгтэй хавтгай) шүргэлтийн цэгт татсан бөмбөрцгийн радиуст перпендикуляр.
70. Бөмбөрцгийн шүргэгч шулуун нь (бөмбөрцөгтэй цор ганц ерөнхий цэгтэй шулуун) шүргэлтийн цэгт татсан бөмбөрцгийн радиуст перпендикуляр.
71. Хоёр талст өнцөгт багтсан бөмбөрцгийн төв нь энэ өнцгийн биссектор хавтгай дээр оршино.
72. Бөмбөрцөгт нэг цэгээс татсан шүргэгч хэрчмүүд хоорондоо тэнцүү.
73. Шүргэлцсэн бөмбөрцгүүдийн (нэг ерөнхий цэгтэй бөмбөрцгүүд) төвүүдийг дайрсан шулуун тэдгээрийн шүргэлтийн цэгийг дайрна.

74. Хэрэв ялгаатай хоёр бөмбөрцөг нэгээс олон ерөнхий цэгүүдтэй бол тэд тойргоор огтлолцоно. Тэр тойргийн хавтгай нь өгөгдсөн бөмбөрцгүүдийн төвүүдийг дайрсан шулуунд перпендикуляр.

Зөв пирамид.

75. $ABCD$ нь D оройтой зөв гурвалжин пирамид, DM нь өндөр бөгөөд суурийн тал нь a, харин A_1, B_1 ба C_1 нь харгалзан BC, AC ба AB талуудын дундаж цэгүүд бол

а) $\measuredangle DAM = \measuredangle DBM = \measuredangle DCM$ -хажуу ирмэгийн суурийн хавтгайтай үүсгэх өнцөг;

б) $\measuredangle DA_1M = \measuredangle DB_1M = \measuredangle DC_1M$ -хажуу талсын суурийн хавтгайтай үүсгэх өнцгийн хоёр талст өнцөг;

в) $\measuredangle AFB$ (F - A оройгоос DC хажуу ирмэгт буулгасан перпендикулярын суурь) –пирамидын хажуу талсуудын хоорондох шугаман өнцөг;

г) $AA_1 = BB_1 = CC_1 = a\sqrt{3}/2$ -суурийн гурвалжны өндөр;

д) $AM = BM = CM = 2AA_1/3 = a/\sqrt{3} = \left(a\sqrt{3}\right)/3$ -хажуу ирмэгийн суурийн хавтгай дээрх ортогональ проекц;

е) $A_1M = B_1M = C_1M = AA_1/3 = a/(2\sqrt{3}) = a\sqrt{3}/6$ -апофемын суурийн хавтгай дээрх ортогональ проекц;

ж) C_1F нь AB ба CD гэсэн эсрэг ирмэгүүдийн ерөнхий перпендикуляр;

76. Зөв гурвалжин пирамидын эсрэг ирмэгүүд нь харилцан перпендикуляр.

77. a ирмэгтэй зөв тетраэдрийн өндөр нь $a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ байна.

78. Хэрэв $PABCD$ нь P оройтой зөв дөрвөн өнцөгт пирамид бөгөөд PM нь өндөр,суурийн тал нь a, харин A_1, B_1, C_1 ба D_1 нь харгалзан AB, BC, CD ба AD талуудын дундаж цэгүүд бол

а) $\measuredangle PAM = \measuredangle PBM = \measuredangle PCM = \measuredangle PDM$ -хажуу ирмэгийн суурийн хавтгайтай үүсгэх өнцөг;

б) $\measuredangle PA_1M = \measuredangle PB_1M = \measuredangle PC_1M = \measuredangle PD_1M$ -хажуу талсын суурийн хавтгайтай үүсгэх хоёр талст өнцгийн шугаман өнцөг;

в) $\measuredangle BFD$ (F - B оройгоос хажуу ирмэгт татсан перпендикулярын суурь)-хөрш хажуу талсуудын хоорондох шугаман өнцөг;

г) $\measuredangle A_1PC_1 = \measuredangle B_1PD_1$ -эсрэг хажуу талсуудын хоорондох хоёр талст өнцгийн шугаман өнцөг;

д) $AM = BM = CM = DM = DB/2 = \left(a\sqrt{2}\right)/2 = a/\sqrt{2}$ -хажуу ирмэгийн суурийн хавтгай дээрх ортогональ проекц;

е) $A_1M = B_1M = C_1M = D_1M = a/2$ -апофемын суурийн хавтгай дээрх ортогональ проекц;

ж) FM -суурийн BD диагональ ба AP хажуу ирмэгийн ерөнхий перпендикуляр.

79. Зөв дөрвөн өнцөгт пирамидын хажуу ирмэг нь суурийн түүнийг дайраагүй диагональд перпендикуляр байна.

Олон талстын гадаргуугийн талбай.

80. Призмийн хажуу гадаргуу нь түүний перпендикуляр огтлолын периметр ба хажуу ирмэгийн үржвэртэй тэнцүү.
81. Зөв пирамидын хажуу гадаргуу нь түүний суурийн талбайг хажуу талсын суурийн хавтгайтай үүсгэх өнцгийн косинуст хуваасантай тэнцүү.

Олон талстын эзэлхүүн.

82. Тэгш өнцөгт параллелпипедийн эзэлхүүн нь түүний 3 хэмжээсийн үржвэртэй тэнцүү.
83. Налуу призмийн эзэлхүүн нь түүний перпендикуляр огтлолын талбай ба хажуу ирмэгийн үржвэртэй тэнцүү.
84. Призмийн эзэлхүүн нь түүний суурийн талбай ба өндрийн үржвэртэй тэнцүү.
85. Гурвалжин призмийн эзэлхүүн нь хажуу талсуудын талбайн үржвэр ба эдгээр хажуу талсуудаас түүний эсрэг орших ирмэг хүртлэх зайгаар үржүүлсэн үржвэрийн хагастай тэнцүү.
86. Пирамидын эзэлхүүн нь түүний суурийн талбайг өндрөөр үржүүлсний гуравны нэгтэй тэнцүү.
87. Ижил өндөртэй бөгөөд сууриуд нь тэнцүү пирамидууд эзэлхүүнээрээ тэнцүү.
88. Пирамидын нэг орой ба түүний суурь дээрх шулууныг агуулсан хавтгай нь уг пирамидын эзэлхүүнийг тэр шулуун,суурийн талбайг хуваасантай адил харьцаатай хуваана.
89. $ABCD$ гурвалжин пирамидын DA, DB ба DC ирмэгүүд дээр харгалзан A_1, B_1 ба C_1 цэгүүд оршино.Тэгвэл $A_1B_1C_1D_1$ пирамидын эзэлхүүнийг $ABCD$ пирамидын эзэлхүүнд харьцуулсан харьцаа нь $\frac{DA_1}{DA} \cdot \frac{DB_1}{DB} \cdot \frac{DC_1}{DC}$ -тэй тэнцүү.
90. Төсөөтэй олон талстуудын эзэлхүүнүүдийн харьцаа нь төсөөгийн коэффициентийн куб зэрэгтэй тэнцүү.
91. Тетраэдрийн суурийн талбайг өндрөөр үржүүлсэн үржвэр нь тогтмол.
92. Тетраэдрийн эзэлхүүн V нь эсрэг орших хоёр ирмэгийн урт болох a, b ба тэдгээрийн хоорондох зай c болон тэдгээрийн хоорондох өнцөг φ -ийн синус,эдгээрийн үржвэрийн зургааны нэгтэй тэнцүү. Ө.х $V = \frac{1}{6} abc \cdot \sin \varphi$.
93. Тетраэдрийн эзэлхүүн V нь түүний хоёр талсын талбай болох P ба Q -ийн үржвэрийг хоорондох өнцөг φ -ийн синусээр үржсэн үржвэрийг ерөнхий ирмэгийн урт a -д харьцуулсан харьцааны гуравны хоёртой тэнцүү.Ө.х $V = \frac{2}{3} \frac{P \cdot Q \cdot \sin\varphi}{a}$.
94. а) Тетраэдрийн эзэлхүүн нь түүний бүтэн гадаргуугийн талбайг түүнд багтсан бөмбөрцгийн радиусаар үржсэн үржвэрийг гуравны нэг дахин авсантай тэнцүү.
б) Бөмбөрцгийг багтааж болох олон талстын эзэлхүүн нь уг олон талстын бүтэн гадаргуугийн талбай ба бөмбөрцгийн радиусын үржвэрийн гуравны нэгтэй тэнцүү.

Дугуй биеийн эзэлхүүн ба гадаргуу.

95. Цилиндрийн эзэлхүүн нь түүний суурийн талбайг өндрөөр үржсэнтэй тэнцүү.
96. Конусын эзэлхүүн нь түүний суурийн талбайг өндрөөр үржүүлсний гуравны нэгтэй тэнцүү.
97. R радиустай бөмбөлгийн эзэлхүүн нь $4\pi R^3/3$ -тай тэнцүү.

98. R радиустай бөмбөлгийн h өндөртэй бөмбөлөг сегментийн эзэлхүүн нь $\pi h^2\left(R-h/3\right)$-тай тэнцүү.

99. Суурийн радиус нь r ба h өндөртэй цилиндрийн хажуу гадаргуугийн талбай нь $2\pi rh$-тай тэнцүү.

100. Суурийн радиус нь r ба үүсгэгчийн урт нь l-тэй тэнцүү конусын хажуу гадаргуугийн талбай нь πrl-тэй тэнцүү.

101. R радиустай бөмбөрцгийн гадаргуугийн талбай нь гадаргуугийн талбай нь $4\pi R^2$-тай тэнцүү.

102. R радиустай бөмбөлгийн h өндөртэй бөмбөлөг сегментийн бөмбөрцөг гадаргуугийн талбай нь $2\pi Rh$-тай тэнцүү.

II хэсэг. Элементар геометрийн сонгодог бодлого ба теоремууд

Хавтгайн геометр

1. Адил хажуут гурвалжны суурийн дурын цэгээс хажуу талууд хүртлэх зайн нийлбэр тогтмол.

2. Хэрэв нэгэн гурвалжны гурван медиан нөгөө гурвалжны харгалзан гурван медиантай тэнцүү бол гурвалжнууд тэнцүү.

3. ABC гурвалжны A оройгоос медиан AB ба AC талуудын нийлбэрийн хагасаас бага, гэтэл тэдгээрийн ялгаварын хагасаас их.

4. Гурвалжны гурван медиан ы нийлбэр периметрээс бага, гэтэл гурвалжны периметрийн дөрөвний гураваас их.

5. Гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн диагоналиудын нийлбэр түүний эсрэг хоёр талын нийлбэрээс их.

6. Гурвалжны оройг эсрэг тал дээр орших цэгтэй холбосон хэрчим нөгөө хоёр талын ихээс бага.

7. Гурвалжны талууд дээр тэмдгэлсэн дурын хоёр цэгийн хоорондох зай түүний талуудын хамгийн ихээс их биш.

8. а) Хэрэв ABC ба $A_1B_1C_1$ гурвалжнуудын хувьд $AB = A_1B_1, AC = A_1C_1$ ба $\measuredangle BAC > \measuredangle B_1A_1C_1$ бол $BC > B_1C_1$.

б) Хэрэв ABC ба $A_1B_1C_1$ гурвалжнуудын хувьд $AB = A_1B_1, AC = A_1C_1$ ба $BC > B_1C_1$ бол $\measuredangle BAC > \measuredangle B_1A_1C_1$.

9. AA_1 нь ABC гурвалжны медиан байг. Өнцөг A хурц байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $AA_1 > BC/2$.

10. Гурвалжны дотор орших дурын цэгээс түүний гурван оройнууд хүрэх зайн нийлбэр хагас периметрээс их, гурвалжны периметрээс бага.

11. r ба R $\left(r < R\right)$ радиустай хоёр тойрог огтлолцох зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь тэдгээрийн төвүүдийн хоорондох зай $r+R$-ээс бага, $R-r$-ээс их.

12. Хэрэв дөрвөн өнцөгтийн эсрэг талуудын дунджийг холбосон хэрчмүүд

а) дөрвөн өнцөгтийн диагоналууд перпендикуляр бол тэнцүү.

б) дөрвөн өнцөгтийн диагоналууд тэнцүү бол перпендикуляр.

13. K, L, M, N цэгүүд нь $ABCDE$ таван өнцөгтийн харгазан AB, BC, CD, DE талуудын дундаж, харин P ба Q нь харгалзан KM ба LN хэрчмүүдийн дундаж цэг. Тэгвэл $PQ // AE$ ба $PQ = AE/4$.

14. Хоёр адил талт ABC ба CDE (оройнууд нь цагийн зүүний эсрэг тэмдэглэгдсэн) гурвалжны AE шулууны нэг талд C цэг зөвхөн ганцаараа байрласан. M, N ба K нь харгалзан BD, AC ба CE хэрчмүүдийн дундаж цэгүүд байг. Тэгвэл MNK - адил талт.

15. Трапецийн хажуу талын өнцгийн биссектрис түүний дундаж шугамтай огтлолцоно.

16. Параллелограммын талууд a ба b тэнцүү. Тэгвэл параллелограммын өнцгүүдийн биссектрисийн огтлолцолд үүссэн дөрвөн өнцөгтийн диагональ $|a-b|$ тэнцүү.

17. Хэрэв трапецийн их суурийн өнцгүүдийн нийлбэр 90° бол трапецын суурийн дундажийг холбосон хэрчим тэдгээрийн ялгаварын хагастай тэнцүү.

18. $ABCD$ параллелограммын AB ба AD талууд дээрх M, N цэгүүд нь MC ба NC шулуунууд параллелограммыг гурван тэнцүү хэсэгт хуваадаг. Хэрэв $BD = d$ бол MN -ийг ол.

19. Трапецын диагоналууд 3 ба 5-тай тэнцүү,харин сууриудын дундаж цэгүүдийг холбосон хэрчим 2 урттай. Трапецын талбайг ол.

20. Трапецийн сууриудтай параллель бөгөөд түүний диагоналуудаар гурван хэсэгт хуваагдах хэрчмийн захын хоёр хэрчмийн уртууд тэнцүү.

21. a ба b урттай сууриуд бүхий трапецийн диагоналуудын огтлолцлын цэгийг дайрсан шулууны трапец дотрох хэрчмийн урт $\dfrac{2ab}{a+b}$-тэй тэнцүү.

22. a ба b урттай сууриуд бүхий трапецийн сууриудтай параллель шулуунаар уг трапец ижил талбайтай хоёр трапецд хуваагдана. Тэгвэл энэ шулууны трапец дотрох хэрчмийн урт $\sqrt{\left(a^2+b^2\right)/2}$ –той тэнцүү.

23. AB хэрчмийн дундаж цэг M бөгөөд A, M ба B цэгүүдийн ямар нэг шулуун дээрх проекц нь A_1, M_1 ба B_1 бол M_1 цэг A_1B_1 хэрчмийн дундаж цэг.

24. ABC хурц өнцөгт гурвалжны BD ба CE өндрүүдийг татав. B ба C оройгоос ED шулуунд BF ба CG -перпендикуляруудыг татсан бол $EF = DG$ байна.

25. AB хэрчим дээр C цэг авав. C цэгийг дайрсан, AC ба BC диаметртэй тойргуудыг K ба L цэгүүдээр огтлох шулуун AB диаметртэй тойргийг M ба N цэгүүдээр огтлолдог бол $KM = LN$ байна.

26. α, β ба γ нь гурвалжны өнцгүүд ба $\alpha \le \beta \le \gamma$ байг. Тэгвэл $\alpha \le 60^\circ, \gamma \ge 60^\circ, 0^\circ < \beta < 90^\circ$ байна.

27. Гурвалжны хоёр тал дээр гадаад байдлаар квадратууд байгуулав. Тэгвэл гурвалжны нэг оройгоос гарсан,квадратуудын талуудын төгсгөлүүдийг холбосон хэрчим уг оройгоос татсан медианаас хоёр дахин их урттай.

28. Пифагорын өргөтгөсөн теорем. ABC тэгш өнцөгт гурвалжны тэгш өнцгийн оройгоос татсан өндөр нь CD болог. Тэгвэл ABC, CBD ба ACD гурвалжнууд төсөөтэй. Хэрэв l, m ба n нь харгалзан дээрх гурвалжнуудын шугаман элементүүд бол $l^2 = m^2 + n^2$ тэнцэтгэл биелэнэ.

29. Тэгш өнцөгт гурвалжны тэгш өнцгийн оройгоос татсан өндөр энэ гурвалжинг хоёр гурвалжинд хуваана. Эдгээр гурвалжнудад багтсан тойргийн төвүүдийн хоорондох зай нэг бол анхны гурвалжинд багтсан тойргийн радиусыг ол.

30. Хоёр тойрог A ба B цэгүүдээр огтлолцоно. Эхний тойргийн AC ба BD хөвчүүд хоёр дах тойргийг E ба F цэгүүдээр огтлодог бол CD ба EF шулуунууд параллель.

31. Хоёр тойргийн шүргэлтийн цэгийг дайрсан огтлогч татав. Үүсэх хөвчүүдийн төгсгөлийн цэгүүдийг дайруулан татсан шүргэгчид параллель.

32. Коперникийн теорем. Үл хөдлөх тойргийг дотуур шүргэсэн, түүнээс хоёр дахин бага радиустай тойрог өнхрөхгүйгээр гулсаж байг. Тэгвэл гулсах тойргийн бэхлэгдсэн K цэг үл хөдлөх тойргийн диаметрээр хөдлөнө.

33. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны биссектрисуудын үргэлжлэлүүд энэ гурвалжныг багтаасан тойргийг A_1, B_1 ба C_1 цэгүүдээр огтлоно. Тэгвэл $A_1B_1C_1$ гурвалжны өндрүүд AA_1, BB_1, CC_1 шулуунууд дээр оршино.

34. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны өндрүүдийн үргэлжлэлүүд энэ гурвалжинг багтаасан тойргийг A_1, B_1, C_1 цэгүүдээр огтлоно. Тэгвэл $A_1B_1C_1$ гурвалжны биссектрисууд AA_1, BB_1, CC_1 шулуунууд дээр оршино.

35. Хэрэв дараах нөхцлүүдийн нэг нь биелэж байвал A, B, C ба D дөрвөн цэг нэг тойрог дээр оршино.

а) $\measuredangle CAD = \measuredangle CBD = 90^\circ$.

б) A ба B цэгүүд CD шулууны нэг талд орших ба $\measuredangle CAD = \measuredangle CBD.$

в) AC ба BD шулуунууд O цэгт огтлолцох ба $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.

36. ABC тэгш өнцөгт гурвалжны катетууд $BC = a$ ба $AC = b$ болно. AB гипотенуз дээр гадаад байдлаар $ABKM$ квадрат байгуулав.Тэгвэл C цэгээс квадратын төв хүртлэх зай $(a+b)/\sqrt{2}$ байна.

37. ABC тэгш өнцөгт гурвалжны AB гипотенуз дээр гадаад байдлаар O төвтэй квадрат байгуулав. CO нь тэгш өнцгийн биссектрис гэж батал.

38. ABC гурвалжны B оройн өнцөг 60° ба AD, CE биссектрисууд O цэгт огтлолцоно. $OD = OE$ гэж батал.

39.а) O цэгийг дайрсан дайрсан гурван шулуун бие биетэйгээ 60° өнцөг үүсгэнэ.Тэгвэл O цэгээс ялгаатай дурын цэгийн эдгээр шулуунууд дээрх проекцууд зөв гурвалжны оройнууд байна.

б) Дурын цэгийн гурвалжны өндрүүд дээрх проекцууд өгөгдсөнтэй төстэй гурвалжны оройнууд байна.

40. Адил талт ABC гурвалжны C оройг дайруулан дурын шулуун татав. K ба M нь A, B цэгүүдийн энэ шулуун дээрх проекцууд, P нь AB талын дундаж цэг. KMP гурвалжин адил талт гэж батал.

41. Гурвалны өндөр бүрийн суурийг хажуу талууд дээр нь проекцлов. Энэ үед гарч ирэх зургаан цэг нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

42. Архимедийн бодлого. Тойргийн AB нумд хоёр хэрчмээс тогтох AMB хугархай шугам багтжээ $(AM > MB)$. AB нумын дундаж K цэгээс AM хэрчимд буулгасан KH перпендикулярын суурь хугархай шугамыг таллан хуваана, өөрөөр хэлбэл $AH = HM + MB$ гэж батал.

43. Адил талт ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн BC нум дээр дурын M цэг авав. Тэгвэл $AM = BM + CM$.

44. Торричеллийн цэг. ABC гурвалжны талууд дээр гурвалжны гадна талд адил талт BCA_1, CAB_1, ABC_1 гурвалжнууд байгуулсан ба AA_1, BB_1, CC_1 хэрчмүүдийг татав. Тэгвэл

а) Эдгээр хэрчмүүд тэнцүү;

б) Эдгээр хэрчмүүд нэг цэгт огтлолцоно.
в) Хэрэв энэ цэг ABC гурвалжны дотор орших байвал түүнээс гурвалжны оройнууд хүртлэх зайнуудын нийлбэр AA_1, BB_1, CC_1 хэрчмүүдтэй тэнцүү.

45. Фермагийн бодлого. Хурц өнцөгт гурвалжны дотор талд түүнээс оройнууд хүртлэх зайнуудын нийлбэр хамгийн бага байх цэгийг ол.
46. A цэг ба ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв O цэгийг дайрсан шулуун энэ гурвалжныг багтаасан тойргийг M цэгт огтолдог бол BOM ба COM нь адил хажуут гурвалжнууд байна.
47. Мансионы теорем. Гурвалжинд багтсан ба гадна талд нь багтсан тойргуудын төвүүдийг холбосон хэрчим багтаасан тойргоор таллан хуваагдана гэж батал.
48. Эйлерийн томъёо. Хэрэв O_1, O_2 нь ABC гурвалжны багтсан ба багтаасан тойргийн төвүүд, харин r ба R нь эдгээр тойргуудын радиусууд бол $O_1O_2 = \sqrt{R^2 - 2rR}$ байна.
49. Гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн талуудаар диаметрээ хийсэн дөрвөн дугуй дөрвөн өнцөгтийг бүхэлд нь бүрхэнэ.
50. Гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн эсрэг хоёр өнцөг мохоо. Энэ өнцгүүдийн оройнуудыг холбосон диагональ нөгөө диагоналиас бага гэж батал.
51. Хоёр тойрог дотоод байдлаар M цэгт шүргэлцэнэ. AB нь том тойргийн хөвч бөгөөд жижиг тойргийг T цэгт шүргэнэ. Тэгвэл MT нь AMB өнцгийн биссектрис гэж батал.
52. Хос хосоороо шүргэлцсэн гурван тойргийн нэг цэгийг дайрсан ерөнхий хөвчүүд буюу тэдгээрийн үргэлжлэлүүд эсвэл параллель, эсвэл нэг шулуун дээр оршино гэж батал.
53. AB хөвчийн үргэлжлэл дээр M цэг оршино. Тойргийн C цэгийн хувьд $MC^2 = MA \cdot MB$ тэнцэтгэл биелэх бол MC -тойргийн шүргэгч болно.
54. Праллелограмийн талууд дээр гадаад байдлаар байгуулсан квадратуудын төвүүд квадратын оройн цэгүүд болно.
55. Хэрэв гурвалжны нэг өнцөг нь 120° бол түүний биссектрисийн сууриар үүссэн гурвалжин тэгш өнцөгт.
56. Хэрэв ABC гурвалжны $\measuredangle B = 120^\circ, AE, BD$ ба CM биссектрисууд O цэгт огтлолцдог бол $\measuredangle DMO = 30^\circ$.
57. Шулуун (тойрог) ба түүн дээр A, B цэгүүд өгчээ. Нэг нь өгөгдсөн шулууныг (тойргийг) A цэгт, нөгөө нь B цэгт шүргэдэг тойргуудын шүргэлцлийн цэгүүдийн геометр байрыг ол.
58. Эйлерийн шулуун. Аливаа гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын цэг (орто төв) H, багтаасан тойргийн төв O ба медиануудын огтлолцлын (хүндийн төв) цэг M нэг шулуун дээр оршино. M цэг O ба H цэгүүдийн хооронд орших ба $MH = 2 \cdot MO$ байна.
59. Менелейн теорем. ABC гурвалжин өгчээ. Ямар нэг шулуун түүний AB, BC талууд ба AC талын үргэлжлэлийг харгалзан C_1, A_1, B_1 цэгүүдээр огтлов. Тэгвэл $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$ байна.
60. Чевийн теорем. A_1, B_1 ба C_1 цэгүүд нь харгалзан ABC гурвалжны BC, CA ба AB талууд дээр оршдог байг. AA_1, BB_1, CC_1 хэрчмүүд нэг цэгт огтлолцох зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$ байна.

61. а) **Жергоннын цэг**. Гурвалжинд тойрог багтжээ. Гурвалжны талууд дээрх шүргэлтийн цэгүүдийг эсрэг оройнуудтай холбов. Тэгвэл үүссэн гурван хэрчим нэг цэгт огтлолцоно.

б) **Нагелийн цэг**. Аливаа гурвалжны хувьд оройнуудыг эсрэг тал дээрх гадаад багтсан тойргийн шүргэлтийн цэгүүдтэй холбоход үүссэн хэрчмүүд нэг цэгт огтлолцоно.

62. ABC гурвалжны AD өндөр дээрх дурын M цэгийг дайруулан BM ба CM шулуунууд татахад харгалзан AC ба AB талуудыг P,Q цэгт огтлов. Тэгвэл AD нь PDQ өнцгийн биссектрис болно.

63. $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн диагоналуудын огтлолцлын P цэгийг, AB ба CD шулуунуудын огтлолцлын Q цэгтэй холбосон шулуун AD талыг хагаслан хуваана. Тэгвэл уг шулуун BC талыг хагаслан хуваана.

64. Хэрэв ABC гурвалжны BC талаар диаметрээ хийсэн тойрог AB ба AC талуудтай M,N цэгт огтлолцдог бол $S\left(AMN\right)=S\left(ABC\right)\cdot\cos^2\alpha$ байна.

65. Трапецийн диагоналийн хэрчмүүд ба түүний сууриудаар үүссэн гурвалжнуудын талбай S_1 ба S_2 байв. Трапецийн талбайг ол.

66. Хэрэв ABC гурвалжны талбай S бол тал нь ABC гурвалжны медианууд байх гурвалжны талбай $\frac{3}{4}S$ байна.

67. Гурвалжны дотор орших ямар нэг цэгийг дайруулан талуудтай параллель гурван шулуун татав. Эдгээр шулуунуудаар гурвалжин зургаан хэсэгт хуваагдсан бөгөөд гурван гурвалжных нь талбай S_1,S_2,S_3 байв. Тэгвэл өгөгдсөн гурвалжны талбай $\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$ байна.

68. Гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн тал бүрийг гурван тэнцүү хэсэгт хуваасан цэгүүд тэмдэглэв. Эсрэг орших талууд дээрх харгалзах хуваалтын цэгүүдийг холбосон хэрчмүүд татав. Тэгвэл эдгээр хэрчмүүд бие биеэ гурван тэнцүү хэсэгт хуваана.

69. Хоёр шулуун гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн эсрэг хоёр талыг гурван тэнцүү хэсэгт хуваав. Тэгвэл эдгээр шулуунуудын хооронд заагласан хэсэг нь дөрвөн өнцөгтийн талбайн гуравны нэг болно.

70. Паскалын теорем. Багтсан зургаан өнцөгтийн эсрэг талуудын үргэлжлүүдийн огтлолцлын цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

71. Брианшонийн теорем. Багтаасан зургаан өнцөгтийн эсрэг оройнуудыг холбосон диагоналууд нэг цэгт огтлолцоно.

72. Хэрэв дөрвөн өнцөгтөд тойрог багтсан бол дөрвөн өнцөгтийн эсрэг талуудыг багтсан тойрог шүргэсэн цэгүүдийг холбосон хэрчмүүд диагоналуудын огтлолцлын цэгийг дайрна.

73. A ба B хүрэх зайн квадратуудын ялгавар нь тогтмол байх цэгүүдийн геометр байр нь AB-д перпендикуляр шулуун байна.

74. AB ба CD шулуунууд перпендикуляр байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$ байна.

75. O_1 ба O_2 төвүүдтэй хоёр тойрог өгчээ. Өгөгдсөн тойргуудад татсан шүргэгчүүд тэнцүү байх M цэгүүдийн геометр байр O_1O_2-д перпендикуляр шулуун буюу шулууны хэсэг байна. Ямар тохиолдолд цэгүүдийн геометр байр нь бүх шулуун байх вэ?

76. $AC \neq BC$ талуудтай ABC гурвалжны C өнцгийн биссектрис, C оройгоос татсан өндөр ба медианыг хагаслан хуваах зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\measuredangle C = 90^\circ$ байна.
77. Хэрэв нэг оройгоос гарсан өндөр, медиан, биссектрис гурвалжны өнцгийг дөрвөн тэнцүү хэсэгт хуваадаг бол гурвалжны өнцгүүдийг ол.
78. Дурын ABC гурвалжны BC талын дундаж цэг энэ гурвалжныг багтаасан тойргийн A оройтой диаметриал эсрэг цэг (A-г дайрсан диаметрийн нөгөө төгсгөлийн цэг) ба гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын цэгийг холбосон хэрчим дээр орших ба уг хэрчмийг хагаслан хуваана.
79. Гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын цэгийн (ортотөв) чанарууд.
а) ABC гурвалжны өндрүүд H цэгт огтлолцжээ. Тэгвэл ABC, AHB, BHC ба AHC гурвалжнуудыг багтаасан тойргийн радиусууд хоорондоо тэнцүү.
б) Хэрэв H нь ABC гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын цэг, харин O нь багтаасан тойргийн төв бол $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ байна.
в) Хэрэв H нь ABC гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын цэг бол BC ба AH хэрчмүүдийн дундаж цэгүүдийн хоорондох зай ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн радиустай тэнцүү.
г) Гурвалжны ортотөвөөс орой хүрэх зай нь гурвалжныг багтаасан тойргийн төвөөс энэ оройн эсрэг тал хүрэх зайнаас хоёр дахин урт.
д) Ортотөвийн гурвалжны талуудыг агуулсан шулуунтай тэгш хэмтэй цэгүүд нь гурвалжныг багтаасан тойрог дээр оршино.
80. Тэнцүү радиустай гурван тойрог O цэгт огтлолцсон ба түүнээс гадна хос хосоороо A, B, C цэгүүдээр огтлолцжээ. Тэгвэл а) ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн радиус анхны тойргийн радиустай тэнцүү.
б) Тойргийн төвийг нөгөө хоёрын огтлолцлын цэгтэй холбосон гурван шулуун нэг цэгт огтлолцоно.
в) O цэгт ABC гурвалжны ортотөв болно.
81. M гурвалжныг багтаасан тойргийн төв O ,өндрүүдийн огтлолцлын цэг H байг.Тэгвэл $\measuredangle HAB = \measuredangle OAC$ байна.
82. Хэрэв BM ба CN нь ABC гурвалжны өндрүүд, харин гурвалжныг багтаасан тойргийн төв O бол $OA \perp MN$ байна.
83. а) Хурц өнцөгт ABC гурвалжны өндрүүдийн огтлоцлын цэг H ба $CH = AB$ гэж өгөгдсөнөөр C өнцгийг ол.
б) Хурц өнцөгт ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн радиус R, өнцгүүдийн огтлолцлын цэг H ба $CH = R$ гэж өгөгдсөнөөр C өнцгийг ол.
84. Гурвалжны өндрийн суурийг талууд руу проекцлов. Проекцийг холбосон хэрчмийн урт өндрийн сонголтоос хамаарахгүйг батал.
85. AB ба CD хэрчмүүд нь нэг тойргийн диаметрууд. Энэ тойргийн M цэгээс AB ба CD шулуунуудад MP ба MQ перпендикулярууд буулгав. PQ хэрчмийн урт M цэгийн сонголтоос хамаарахгүйг батал.
86. ABC хурц өнцөгт гурвалжны C өнцгийн оройгоос CH өндөр, харин H цэгээс BC ба AC талуудад харгалзан HM ба HN перпендикулярууд буулгав. MNC ба ABC гурвалжнууд төсөөтэйг батал.
87. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны AM ба CN өндрүүдийн үргэлжлэлүүд гурвалжныг багтаасан тойрогтой P ба Q цэгээр огтлолцов. Хэрэв $AC = a, PQ = 6a/5$ бол багтаасан тойргийн радиусыг ол.
88. ABC гурвалжны BH өндрийн суурийн H цэгийн AB ба BC талуудтай тэгш хэмтэй цэгүүд нь K ба P. Тэгвэл KP хэрчмийн AB ба BC талуудтай (түүний

үргэлжлэлтэй) огтлолцсон цэгүүд нь ABC гурвалжны өндрийн суурь байна гэж батал.

89. Орто гурвалжны чанарууд. (ө.х өндрийн сууриудад оройтой гурвалжин)

а) Хурц өнцөгт гурвалжны өндрүүд нь түүний орто гурвалжны өндрийн биссектрис байна.

б) Хурц өнцөгт ABC гурвалжны харгалзан BC, AC ба AB талууд дээрх A_1, B_1 ба C_1 цэгүүд нь $\measuredangle BA_1C_1 = \measuredangle CA_1B_1, \measuredangle CB_1A_1 = \measuredangle AB_1C_1$ ба $\measuredangle AC_1B_1 = \measuredangle BC_1A_1$ бол $A_1B_1C_1$ нь ABC гурвалжны орто гурвалжин болно.

в) Өгөдсөн гурвалжинд багтсан тойргийн шүргэлтийн цэгүүдийг холбосон хэрчим татаж гурвалжин үүсгээд уг гурважны өндрүүдийг татав .Эдгээр өндрүүдийн сууриудыг холбосон шулуунууд анхны гурвалжны талуудтай параллель байна гэж батал.

г) **Фаньяно-гийн бодлого**. Өгөгдсөн хурц өнцөгт гурвалжны талууд дээр оройтой боломжийн хамгийн бага периметртэй гурвалжин нь өгсөн гурвалжны орто гурвалжин болно.

90. Хурц өнцөгт гурвалжны өнцгүүдийн сууриудыг холбосон хэрчмүүдийн урт 8, 15 ба 17-той тэнцүү. Гурвалжны багтаасан тойргийн радиусыг ол.

91. Есөн цэгийн тойрог. Аливаа гурвалжны талуудын дундаж,өндрүүдийн суурь ба ортотөвөөс орой хүрэх хэрчмийн дундаж гэсэн есөн цэг нэг тойрог дээр оршино.

92. Тойрог ABC гурвалжны BC талыг M цэгт,харин AC ба AB талуудын үргэлжлэлийг P, N цэгт шүргэжээ. Энэ гурвалжинд багтсан тойрог BC талыг K цэгт, AB талыг L цэгт шүргэв. Тэгвэл

а) AN хэрчим ABC гурвалжны хагас периметртэй тэнцүү.

б) AL хэрчим хагас периметр ба BC талын ялгавартай тэнцүү.

в) $BK = CM$.

г) $NL = BC$.

93. ABC гурвалжны BC, CA ба AB талууд дээр харгалзан A_1, B_1 ба C_1 цэгүүд $AC_1 = AB_1, BA_1 = BC_1$ ба $CA_1 = CB_1$ байхаар байрлана. Тэгвэл A_1, B_1, C_1 цэгүүд нь багтсан тойргийн талуудыг шүргэсэн цэгүүд болно.

94. Бие биеэ гадаад байдлаар шүргэлцсэн гурван тойргийн радиусууд 1, 2 ба 3 . Тэгвэл эдгээр тойргуудын шүргэлтийн цэгүүдийг дайрсан тойргийн радиус 1 байна.

95. S -гурвалжны талбай, харин p -хагас периметр байг.

а) Хэрэв r_1 нь a талыг шүргэсэн гадаад багтсан тойргийн радиус бол $r_1 = \dfrac{S}{p-a}$ байна.

б) Хэрэв r –гурвалжинд багтсан тойргийн радиус, харин r_1, r_2, r_3 гадаад багтсан тойргуудын радиус бол $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3}$, $S = \sqrt{r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}$ байна.

96. Хэрэв ABC гурвалжинд багтсан тойрог BC талыг M цэгт шүргэдэг бол ABM ба ACM гурвалжнуудад багтсан тойргууд AM хэрчмийг нэг цэгт шүргэнэ.

97. Хэрэв гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн эсрэг талуудын нийлбэр тэнцүү бол дөрвөн өнцөгтөд тойрог багтааж болно.

98. Хэрэв AD нь ABC гурвалжны биссектрис бол

а) $AD = \dfrac{2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\left(\measuredangle BAC / 2\right)}{AB + AC}$ б) $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$ байна.

99. Штейнер-Лемусийн теорем. Хэрэв гурвалжны хоёр биссектрис тэнцүү бол тэр адил хажуут.

100. Харилцан перпендикуляр диагоналуудтай багтсан дөрвөн өнцөгтийн чанарууд.

$ABCD$ дөрвөн өнцөгт O цэгт төвтэй R радиустай тойрогт багтжээ.Түүний AC ба BD диагоналууд перпендикуляр ба P цэгт огтлолцсон. Тэгвэл

а) APB гурвалжны медиан CD талд перпендикуляр;

б) AOC тахир шугам $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийг хоёр тэнцүү талбайтай дүрсүүдэд хуваана;

в) $AB^2+CD^2=4R^2$;

г) $AP^2+BP^2+CP^2+DP^2=4R^2$ ба $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=8R$ $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=8R^2$;

д) Тойргийн төвөөс дөрвөн өнцөгтийн тал хүрэх зай нь эсрэг талаас хоёр дахин бага байна.

е) Хэрэв B ба C оройгоос AD талд буулгасан перпендикулярууд AC ба BD диагоналтай E ба F цэгт огтлолцдог бол $BCFE$ ромбо.

ж) P цэгийн $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн талууд дээрх проекцуудад оройтой дөрвөн өнцөгт багтсан ба багтаасан дөрвөн өнцөгт байна.

з) Тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн оройнуудад татсан шүргэгчүүдээр үүссэн дөрвөн өнцөгт тойрогт багтсан байна.

101. Хэрэв дөрвөн өнцөгтийн дараалсан талууд a,b,c,d харин түүний талбай S бол $S\le\frac{(ac+bd)}{2}$ байна. Тэнцэлдээ зөвхөн багтсан дөрвөн өнцөгт бөгөөд диагоналууд нь харилцан перпендикуляр байх үед хүрнэ.

102. Брахмагуптийн томъёо. Хэрэв багтсан дөрвөн өнцөгтийн талууд a,b,c,d тэнцүү бол түүний талбайг $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ томъёогоор бодож олно, энд $p=(a+b+c+d)/2$ -дөрвөн өнцөгтийн хагас периметр.

103. a,b,c,d талуудтай дөрвөн өнцөгтөд тойрог багтааж болох ба түүнийг тойрогт багтааж болдог бол түүний талбай нь $\sqrt{abcd}$ байна.

104. Хоёр тойрог A ба B цэгүүдэд огтлолцжээ.Эдгээр тойргууд нэг тойргийн хөвч нь нөгөө тойргоо шүргэсэн байхаар AC ба AD хөвчүүд татав.Тэгвэл $AB=\sqrt{CB\cdot DB}$ байна.

105. Тойрог ба шулуун M цэгт шүргэлцжээ. Энэ тойргийн A ба B цэгүүдээс шулуунд буулгасан перпендикулярууд a ба b урттай. Тэгвэл M цэгээс AB шулуун хүрэх зай $\sqrt{ab}$ тэнцүү.

106. Тойргийн гадна орших M цэгээс тойрогт MA,MB шүргэгчүүд татав. Тойрог дээр орших C цэгээс шүргэгчүүд хүрэх зай a ба b -тэй тэнцүү бол C цэгээс AB шулуун хүрэх зай $\sqrt{ab}$ -тэй тэнцүү.

107. $ABCDE$ таван өнцөгт тойрогт багтжээ. A цэгээс BC,DC ба DE шулуунууд хүрэх зай харгалзан a,b ба c -тэй тэнцүү. Тэгвэл A оройгоос BE шулуун хүрэх зай ac/b -тэй тэнцүү.

108. Симсоний шулуун. Гурвалжныг багтаасан тойргийн дурын цэгээс гурвалжны талуудад (үргэлжлэл) буулгасан перпендикулярийн суурийн цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

109. Хоёр тойргийн огтлолцлын цэгийг дайрсан шулуун тэдгээрийн ерөнхий шүргэгчийг хагаслан хуваана.

110. R ба r радиустай хоёр тойрог A ба B цэгүүд огтлолцсон ба шүргэч шулуун тойргуудыг C, D цэгүүдээр шүргэв. AB ба CD шулуунууд N цэгт (B нь A, N цэгүүдийн хооронд) огтлолцов.
а) ACD гурвалжныг багтаасан тойргийн радиусыг ол.
б) NAC ба NAD гурвалжнуудын N оройгоос буулгасан өндрүүдийн харьцааг ол.
111. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтөд AC ба BD диагоналийг татав. $AD = 2, \measuredangle ABD = \measuredangle ACD = 90^\circ, ABD$ ба ACD гурвалжнуудад багтсан тойргийн төвүүдийн хоорондох зай $\sqrt{2}$ -той тэнцүү гэж мэдэгдсэнээр BC талын уртыг ол.
112. Стюартийн теорем. ABC гурвалжны BC тал дээр D цэг байрлана. Тэгвэл $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD$ байна.
113. $ABCD$ квадрат дотор $\measuredangle PAB = \measuredangle PBA = 15^\circ$ байхаар P цэг байрлана. Тэгвэл DPC -адил талт гурвалжин байна.
114. Хэрэв $ABCD$ багтсан дөрвөн өнцөгтийн хувьд $CD = AD + BC$ тэнцэл биелдэг бол түүний A ба B өнцгийн биссектрисүүд CD тал дээр огтлолцоно гэж батал.
115. ABC гурвалжинд багтсан тойрог AB ба AC талуудыг M, N цэгүүдээр шүргэжээ. B өнцгийн биссектрис ба MN шулууны огтлолцол P цэг бол $\measuredangle BPC = 90^\circ$ гэж батал.
116. A цэгээс тойрогт AP, AQ шүргэгчүүд (P, Q -шүргэлтийн цэг) ба AKL огтлогч (K цэг A, L -ийн хооронд) татав. KL хэрчмийн дундаж M байг. $\measuredangle AMP = \measuredangle AMQ$ гэж батал.
117. O цэгт төвтэй тойргийн KL хөвчийн үргэлжлэл дээрх A цэгээс тойрогт AP, AQ шүргэгчүүд татав. PQ хэрчмийн дундаж цэг M цэг бол $\measuredangle MKO = \measuredangle MLO$ гэж батал.
118. $ABCD$ багтсан дөрвөн өнцөгтийн эсрэг орших AB, CD талуудын үргэлжлэл M цэгт, харин AD ба BC талуудын үргэлжлэл N цэгт огтлолцжээ. Тэгвэл
а) AMD ба DNC өнцгүүдийн биссектрисүүд харилцан перпендикуляр.
б) MQ ба NQ шулуунууд дөрвөн өнцөгтийн талуудыг ромбын орой болох цэгүүдээр огтлоно.
119. Тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгтийн эсрэг талуудын үргэлжлэлүүд P ба Q цэгт огтлолцжээ. Хэрэв P ба Q цэгээс тойрогт татсан шүргэгчүүд a, b урттай бол PQ хэрчмийн уртыг ол.
120. Адил талт ABC гурвалжны BC тал дээрх O цэгт төвтэй тойрог AB ба AC талуудыг харгалзан P ба Q цэгт шүргэнэ. Эдгээр талуудыг M, N цэгт огтлох тойргийн шүргэгчийг татсан бөгөөд OM ба ON хэрчмүүд PQ хэрчимтэй E ба F цэгт огтлолцов. Тэгвэл $EF = MN/2$ байна.
121. Эрвээхэйний бодлого. Тойргийн дурын AB хөвчийн дундаж C цэгийг дайрсан KL ба MN хоёр хөвч татав (K ба M цэг AB -ийн нэг талд оршино). KN хэрчим AB -тэй P цэгт огтлолцов. LM хэрчим AB -тэй Q цэгт огтлолцов. $PC = QC$ гэж батал.
122. Аливаа гурвалжныг багтаасан тойргийн радиус багтсан тойргийн радиусыг хоёр дахин авснаас багагүй, тэнцэлдээ хүрэх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь адил талт гурвалжин.
123. Аполлоний тойрог. Өгөгдсөн хоёр цэг хүрэх зайн харьцаа нь $m:n \ (m \neq n)$ байх цэгүүдийн геометр байр нь тойрог байна.
124. Птолемейн теорем. Багтсан дөрвөн өнцөгтийн эсрэг хоёр талын үржвэрийн нийлбэр түүний диагоналийн үржвэртэй тэнцүү.

125. AC хэрчим дээр B цэг тэмдэглэсэн бөгөөд AB, BC ба AC хэрчмүүдээр диаметрээ хийсэн S_1, S_2, S_3 хагас тойргуудыг AC -ын нэг талд байхаар байгуулав. AC дээрх проекц нь B цэгтэй давхцаж байхаар D цэгийг S_3 дээр тэмдэглэв. S_1 ба S_2 -ийн ерөнхий шүргэгч эдгээр хагас тойргуудыг харгалзан E ба F цэгт шүргэв.

а) S_3 -ийн D цэгт дайрсан шүргэгч EF шулуунтай параллель гэж батал.

б) $BFDE$ –тэгш өнцөгт гэж батал.

в) Гурван хагас тойргуудыг бүгдийг нь шүргэсэн тойргийн төв AC шулуунаас a зайд орших бол уг тойргийн радиусыг ол.

г) **Архимедийн арбелосийн тухай бодлого**. BD хэрчим ба S_1, S_3 -ийг шүргэсэн тойргийн радиус, BD хэрчим ба S_2, S_3 -ийг шүргэсэн тойргийн радиустай тэнцүү гэж батал.

126. Ньютоны теорем. Аливаа багтаасан дөрвөн өнцөгтийн диагоналуудын дундаж ба багтсан тойргийн төв нэг шулуун дээр оршино.

127. Хэрэв M нь ABC гурвалжны медиануудын огтлолцлын цэг, харин O дурын цэг бол $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ байна.

128. Монжийн теорем. Багтсан дөрвөн өнцөгтийн талын дунджийг дайрсан бөгөөд эсрэг талд перпендикуляр шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно.

129. а) α өнцгөөр огтлолцсон хоёр шулууны тэгш хэмийн композиц нь шулуунуудын огтлолцлын цэгийн хувь дахь 2α өнцгийн эргүүлэлт байна.

б) Нийлбэр нь 360° -ийн давталт болдоггүй хоёр эргүүлэлтийн композиц нь мөн эргүүлэлт мөн. Энэ эргүүлэлтийн төв нь хаана байх вэ? Эргүүлэлтийн өнцөг нь ямар байх вэ? Түүнчлэн нийлбэр нь 360° -ийн давталт байх үед асуудлыг авч үз.

130. Наполеоны гурвалжин. Дурын гурвалжны талууд дээр гадаад (дотоод) байдлаар байгуулсан зөв гурвалжны төвүүд зөв гурвалжны оройн цэгүүд болно.

131. Шүргэлцсэн хоёр тойргууд шүргэлтийн цэгийнхээ хувьд гомотет.

132. Шалын теорем. Хавтгайн дурын хөдөлгөөн нь эсвэл параллель зөөлт, эсвэл эргүүлэлт, эсвэл тэнхлэгийн тэгш хэм, эсвэл тэнхлэгийн тэгш хэм ба тэгш хэмийн тэнхлэгтэй параллель чиглэлд параллель зөөх хувиргалтуудын композиц (жишүү тэгш хэм) байна.

133. Гауссын теорем. ABC гурвалжны AB, AC ба BC талуудын үргэлжлэлүүд l шулууныг C_1, B_1 ба A_1 цэгүүдээр огтлодог бол AA_1, BB_1 ба CC_1 хэрчмүүдийн дундаж цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

Байгуулах бодлогууд.

1. Гурвалжныг түүний гурван медианаар нь байгуул.
2. Өгөгдсөн хоёр тойргийн ерөнхий шүргэгчийг байгуул.
3. Өгөгдсөн параллель гурван шулуун дээр оройнууд нь орших зөв гурвалжинг байгуул.
4. Гурвалжныг A, B өнцгүүд ба периметр P -ээр нь байгуул.
5. ABC гурвалжны AB ба BC талууд дээр орших бөгөөд $AX = BY, XY \,//\, AC$ байх X, Y цэгүүдийг байгуул.
6. Гурвалжныг нэг тал, түүний эсрэг өнцөг болон нөгөө хоёр талын нийлбэрээр нь байгуул.
7. Өгөгдсөн цэгийг дайрсан өгөгдсөн өнцөгт багтсан тойрог байгуул.

8. Төгсгөлийн цэгүүд нь өгөгдсөн хоёр тойрог дээр оршдог, өгөгдсөн хэрчимтэй тэнцүү урттай бөгөөд түүнтэй параллель хэрчим байгуул.

9. A ба B цэгүүд l шулууны хоёр талд оршино. l шулуун AMB өнцгийг хагаслан хуваасан байхаар M цэгийг байгуул.

10. M, N цэгүүд l шулууны нэг талд оршино. l шулуун дээр K цэгийг

а) $MK + NK$ нийлбэр хамгийн бага

б) MK ба l шулуунуудын хоорондох өнцөг NK ба l шулуунуудын хоорондох өнцгөөс хоёр дахин бага байхаар тус тус байгуул.

11. Голын эргүүд параллель бөгөөд A ба B тосгод голын хоёр талд байрлана. Голын эрэгт перпендикуляр гүүрийг хаана байрлуулбал A тосгоноос B тосгон хүрэх замын урт хамгийн бага байх вэ?

12. Параллель хоёр шулуун өгөгдөв. Зөвхөн шугам ашиглан

а) Тэдгээрийн нэг дээр орших хэрчмийг хагаслан хуваа.

б) Өгөгдсөн M цэгийг дайруулан эдгээр шулуунуудтай параллель шулуун тат.

13. Параллель хоёр шулуун ба тэдгээрийн нэгэн дээр орших хэрчим, уг хэрчмийн дундаж өгөгдөв. Зөвхөн шугам ашиглан өгөгдсөн M цэгийг дайрсан эдгээр шулуунуудтай параллель шулуун тат.

14. Зөвхөн шугам ашиглан өгөгдсөн цэгээс, өгөгдсөн тойргийн өгөгдсөн диаметрт перпендикуляр тат.

15. Зөвхөн шугам ашиглан өгөгдсөн тойргийн төвөөс өгөгдсөн шулуунд перпендикуляр тат.

16. Өгөгдсөн гурвалжинг өөр нэг өгөгдсөн гурвалжинтай тэнцүү гурвалжинд багтаа.Ө.х өгөгдсөн гурвалжны оройнуудыг дайрсан шулуунуудын огтлолцолд үүсэх гурвалжин нь өөр нэг өгөгдсөн гурвалжинтай тэнцүү байхаар байгуулна.

17. Өгөгдсөн гурвалжинд өөр нэг өгөгдсөн гурвалжинтай тэнцүү гурвалжинг багтаа. Ө.х өгөгдсөн гурвалжны талууд дээр өөр нэг өгөгдсөн гурвалжинтай тэнцүү гурвалжны орой болдог байхаар цэгүүдийг байгуулна.

18. Өгөгдсөн цэгийг дайрсан,өгөгдсөн өнцгөөс гурвалжин огтлон авах шулууныг

а) Гурвалжны периметр өгөгдсөн.

б) Гурвалжны периметр хамгийн бага.

в) Гурвалжны талбай хамгийн бага байхаар тус тус байгуул.

19. Талуудын нь дундаж цэгүүдээр $(2n-1)$-өнцөгт байгуул.

20. Гурвалжныг, түүний нэг оройгоос татсан өндөр, медиан ба биссектрисуудын багтаасан тойргийг огтлох цэгүүдээр нь байгуул.

21. Гурвалжныг, түүнийг багтаасан тойргийн төвийг талуудын хувьд тэгш хэмтэй хувиргахад үүсэх гурван цэгээр байгуул.

22. Гурвалжныг, түүний өндрүүдийн сууриудаар байгуул.

23. Огтлолцсон хоёр тойрог өгөгдөв. Эдгээрийн огтлолцлын цэгүүдийг дайруулан , тойргуудаар хашигдсан хэрчим нь:

а) энэ цэгээр хагаслан хуваагддаг.

б) өгөгдсөн хэрчимтэй тэнцүү байхаар шулуун тат.

24. Хоёр тойрог өгөгдөв. Өгөгдсөн цэгийг дайрсан шулууныг

а) эдгээр тойргуудаар хашигдсан хэрчим нь энэ цэгээр хагаслан хуваагддаг.

б) тойргуудад тэнцүү урттай хөвчүүд үүсгэдэг байхаар тус тус байгуул.

25. Хоёр тойрог өгөгдөв. Өгөгдсөн шулуунтай параллель шулууныг

а) тойргуудад тэнцүү урттай хөвчүүд үүсгэдэг .

б) тойргуудад үүсгэсэн хөвчүүдийн нийлбэр нь өгөгдсөн хэрчимтэй тэнцүү байхаар тус тус байгуул.

26. A ба B цэгүүд тойрог дээр бэхлэгдсэн ба C-тойргийн дурын цэг болно.

а) ABC гурвалжны биссектрисуудын огтлолцлын

б) ABC гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын геометр байрыг ол.

27. a ба b хэрчмүүд өгөгдөв. $\sqrt[4]{a^4+b^4}$ урттай хэрчим байгуул.

28. Өгөгдсөн тойргийг болон өгөгдсөн шулууныг өгөгдсөн цэгт шүргэдэг тойрог байгуул.

29. Өгөгдсөн шулууныг болон өгөгдсөн тойргийг өгөгдсөн цэгт шүргэдэг тойрог байгуул.

30. Өгөгдсөн хоёр цэгийг дайрсан өгөгдсөн шулууныг шүргэх тойрог байгуул.

31. Өгөгдсөн хоёр цэгийг дайрсан өгөгдсөн тойргийг шүргэх тойрог байгуул.

32. Өгөгдсөн цэгийг дайрсан өгөгдсөн тойрог ба шулууныг шүргэх тойрог байгуул.

33. Гурвалжныг гурван өндрөөр нь байгуул.

34. Гурвалжныг багтсан, багтаасан болон аль нэг гадаад багтсан тойргийн төвүүдээр нь байгуул.

35. Өгөгдсөн өнцгийн дотор орших бөгөөд түүнээс энэ өнцгийн талууд хүртлэх зайн нийлбэр нь өгөгдсөн тоотой тэнцүү байх цэгүүдийн геометр байрыг ол.

36. Талууд дээр нь орших дөрвөн цэгээр квадрат байгуул.

37. Зөвхөн гортиг ашиглан

а) хэрчмийг таллан хуваа.

б) өгөгдсөн тойргийн төвийг байгуул.

38. **Аполлоний бодлого.** Өгөгдсөн гурван тойргийг шүргэдэг тойрог байгуул.

Стереометр.

1. Хэрэв огтлолцсон хоёр хавтгай ямар нэг шулуунтай параллель бол тэдгээрийн огтлолцлын шулуун энэ шулуунтай параллель гэж батал.

2. $SABCD$ пирамидын суурь нь $ABCD$ параллелограмм болно. Энэ пирамидыг ABM хавтгай огтлоход ямар дүрс үүсэх вэ? Энд M нь SC ирмэг дээрх цэг.

3. Параллелопипедыг хавтгайгаар огтлоход зөв таван өнцөгт үүсэж болох уу?

4. Тетраэдрийн эсрэг орших ирмэгүүдийн дунджуудыг холбосон хэрчмүүд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

5. Огторгуйн өгөгдсөн цэгийг дайруулан өгөгдсөн солбисон хоёр шулууныг огтлох шулуун тат.

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелопипедийн AC_1 диогональ дээр M цэгийг, харин B_1C шулуун дээр N цэгийг MN ба BD хэрчмүүд параллель байхаар авчээ. Энэ хэрчмүүдийн уртуудын харьцааг ол.

7. $SABCD$ пирамидын суурь нь $ABCD$ дөрвөн өнцөгт болно. ABS ба CDS хавтгайнуудын огтлолын шулууныг байгуул.

8. Гүдгэр дөрвөн талст өнцгийг огтлолд нь параллелограмм үүсч байхаар хавтгайгаар огтолж болно гэж батал.

9. Дурын гурван талст өнцөг өгөгдөв. Ирмэг бүрийг болон түүний эсрэг орших талсын биссектрисийг дайрсан гурван хавтгай авав. Энэ гурван хавтгай нэг шулуунаар огтлолцоно гэж үнэн үү?

10. A, B, C, D нь нэг хавтгайд үл агуулагдах дөрвөн цэг байг. ABC, ABD, BCD гурвалжнуудын медиануудын огтлолцлын цэгүүдийг дайрсан хавтгай BD хэрчмийг ямар харьцаагаар хуваах вэ?

11. M нь $ABCD$ тетраэдрийн AD ирмэгийн дундаж цэг. N цэг AB ирмэгийн B цэгийн талын үргэлжлэл дээр, харин K цэг AC ирмэгийн C цэгийн талын үргэлжлэл дээр, $BN = AB$ ба $CK = 2\cdot AC$ байхаар оршино. Тетраэдрийг MNK

хавтгайгаар огтлоход үүсэх огтлолыг байгуул. Энэ хавтгай DB ба DC ирмэгүүдийг ямар харьцаагаар хуваах вэ?

12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелопипедийн AC ба BA_1 шулуунууд дээр K ба M цэгүүдийг $KM // DB_1$ байхаар авав. $KM : DB_1$ харьцааг ол.

13. $ABCD$ тетраэдр өгөгдөв. M, N ба K цэгүүд харгалзан AD, BC ба DC ирмэгүүд дээр $AM : MD = 1:3$, $BN : NC = 1:1$ ба $CK : KD = 1:2$ байхаар байрлана. Тетраэдр ба MNK хавтгай хоёрын огтлолыг байгуул. Энэ хавтгай AB ирмэгийг ямар харьцаагаар хуваах вэ?

14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелопипед өгөгдөв. M, N ба K цэгүүд харгалзан AB, BC ба DD_1 ирмэгүүдийн дундаж болно. Параллелопипед ба MNK хавтгайн огтлолыг байгуул. Энэ хавтгай CC_1 ирмэг ба DB_1 диагоналийг ямар харьцаагаар хуваах вэ?

15. $ABCD$ трапец суурьтай $SABCD$ дөрвөн өнцөгт пирамид өгөгдөв. Энэ трапецийн AD ба BC сууриудын харьцаа 2-той тэнцүү. Пирамидийг D цэг ба SA, SB ирмэгүүдийн дундаж цэгүүдийг дайрсан хавтгайгаар огтлолсон огтлолыг байгуул. Энэ хавтгай SC ирмэгийг ямар харьцаагаар хуваах вэ?

16. $ABCD$ параллелогррамм суурьтай $SABCD$ дөрвөн өнцөгт пирамид өгөгдөв. M, N ба K цэгүүд харгалзан AS, BS ба CS ирмэгүүд дээр $AM : MS = 1:2$, $BN : NS = 1:3$, $CK : KS = 1:1$ байхаар байрлана. Пирамид ба MNK хавтгайн огтлолыг байгуул. Энэ хавтгай SD ирмэгийг ямар харьцаагаар хуваах вэ?

17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелопипед өгөгдөв. M, N ба K цэгүүд харгалзан AB, CC_1 ба A_1D_1 ирмэгүүд дээр оршино. Параллелопипед ба MNK хавтгайн огтлолыг байгуул.

18. Хавтгай дээр ерөнхий эхлэлтэй гурван цацраг өгөгдөв. Тэдгээр нь хавтгайг тус бүр дээр нь нэг нэг цэг авсан гурван хэсэгт хуваана. Шугам,гортигийн тусламжтайгаар оройнууд нь өгөгдсөн цацрагууд дээр оршдог, харин талууд нь өгөгдсөн цэгүүдийг дайрдаг гурвалжныг байгуул.

19. $SABCD$ дөрвөн өнцөгт ппирамидийн суурь нь $ABCD$ параллелограмм болно. AB ирмэгийн дунджийг дайруулан AC ба SD шулуунуудтай параллель хавтгай тат. Энэ хавтгай SB ирмэгийг ямар харьцаагаар хуваах вэ?

20. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелопипедийн AD ба CC_1 ирмэгүүдийн M ба N дунджуудыг дайруулан DB_1 диагоналтай параллель хавтгай татав. Энэ хавтгай ба параллелопипедийн огтлолыг байгуул. Энэ хавтгай BB_1 ирмэгийг ямар харьцаагаар хуваах вэ?

21. Хавтгай $ABCD$ тетраэдрийн AB, AC, DC ба DB ирмэгүүдийг харгалзан $AM : MB = m$, $AN : NC = n$, $DP : PC = p$ байх M, N, P ба Q цэгүүдэд огтлоно. $DQ : QB$ харьцааг ол.

22. $ABCA_1B_1C_1$ призмийг ABC ба $A_1B_1C_1$ сууриудын медианууд харгалзан O ба O_1 цэгүүдэд огтлолцоно. OO_1 хэрчмийн дунджийг дайруулан CA_1 шулуунтай параллель шулуун татав. Хэрэв $CA_1 = a$ бол, энэ шулууны призм дотор орших хэрчмийг байгуул.

23. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб өгөгдөв.

а) AA_1 ба BD_1; б) BD_1 ба DC_1; в) AD_1 ба DC_1 шулуунуудын хоорондох өнцгийг ол.

24. Огторгуй дахь l шулуун дээр A, B ба C цэгүүд $AB = 10$ ба $BC = 22$ байхаар дараалан байрлажээ. Хэрэв A, B ба C цэгүүдээс m шулуун хүртэлх зай харгалзан 12,13 ба 20 бол l ба m шулуунуудын хоорондох зайг ол.

25. Огторгуйн дурын дөрвөн цэгийн хувьд $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ тэнцэтгэл үнэн гэж батал.

26. Лейбницын томьёо. M нь ABC гурвалжны медиануудын огтлолын цэг, O нь огторгуйн дурын цэг $OM^2=\frac{1}{3}\left(OA^2+OB^2+OC^2\right)-\frac{1}{9}\left(AB^2+BC^2+AC^2\right)$ гэж батал.

27. Пирамидын суурь нь c-тэй тэнцүү гипотенузтай, 30^0 өнцөгтэй тэгш өнцөгт гурвалжин болно. Пирамидын хажуу ирмэгүүд суурийн хавтгайд 45° нална. Пирамидын эзлэхүүнийг ол.

28. S оройтой гурван талст өнцөгт O төвтэй бөмбөлөг байжээ. Бөмбөлгийн талсуудтай шүргэлцсэн цэгүүдийг дайрсан хавтгай OS шулуунтай перпендикуляр гэж батал.

29. a ирмэгтэй кубын бүх ирмэгийн дурын хавтгай дээрх проекцуудын уртуудын квадратуудын нийлбэр нь куб, хавтгай хоёрын харилцан байрлалаас үл хамаарах ба $8a^2$-тай тэнцүү гэж батал.

30. a ирмэгтэй зөв тетраэдрийн бүх ирмэгийн дурын хавтгай дээрх проекцуудын уртуудын квадратуудын нийлбэр нь тетраэдр, хавтгай хоёрын харилцан байрлалаас үл хамаарах ба $4a^2$-тай тэнцүү гэж батал.

31. Гурвалжин пирамидын хажуу талс бүхэн суурийн хавтгайтай 60° өнцөг үүсгэнэ. Суурийн талууд нь 10, 10 ба 12 . Пирамидын эзлэхүүнийг ол.

32. Пирамидын суурь 6 ба 8 талуудтай тэгш өнцөгт . Хажуу ирмэгүүдийн нэг нь суурийн хавтгайтай перпендикуляр ба урт нь 6-тай тэнцүү. Энэ ирмэг ба суурийн түүнтэй солбисон диагональ хоёрын хоорондох зайг болон пирамидын хажуу гадаргуугийн талбайг ол.

33. a ирмэгтэй $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб өгөгдөв.

а) AA_1 ба BD_1; б) BD_1 ба DC_1; в) A_1D ба D_1C шулуунуудын хоорондох зайг ол. Тохиолдол бүхэнд өгөгдсөн шулуунуудын ерөнхий перпендикулярыг байгуул.

34. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тэгш өнцөгт параллелопипед өгөгдөв. BD_1 шулууныг дайруулж AC шулуунтай параллель хавтгай татжээ. Хэрэв $AB=a, BC=b, CC_1=c$ бол энэ хавтгай ба параллелопипедийн суурийн хавтгай хоёрын хоорондох өнцгийг ол.

35. $SABCD$ пирамидийн суурь нь $ABCD$ адил хажуут трапец ба $AB=BC=a, AD=2a$. SAB ба SCD талсуудын хавтгайнууд пирамидын суурийн хавтгайтай перпендикуляр. Хэрэв SAD талсын S оройгоос татсан өндөр $2a$ бол пирамидын өндрийг ол.

36. A, A_1, B, B_1, C, C_1 цэгүүд 11 радиустай бөмбөлөг дээр оршино. AA_1, BB_1, CC_1 шулуунууд харилцан перпендикуляр бөгөөд бөмбөлгийн төвөөс $\sqrt{59}$ зайд орших M цэгт огтлолцоно. Хэрэв BB_1 хэрчмийн урт 18 ба M цэг CC_1 хэрчмийг $\left(8+\sqrt{2}\right):\left(8-\sqrt{2}\right)$ харьцаагаар хуваадаг бол AA_1 хэрчмийн уртыг ол.

37. a ирмэгтэй $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб өгөгдөв. E цэг AD ирмэгийн дундаж. $MNPQ$ зөв тетраэдрийн M, N оройнууд ED_1 шулуун дээр, харин P, Q орйнууд A_1 цэгийг дайрсан, BC шулууныг R цэгт огтолдог шулуун дээр оршино.

а) $BR : BC_1$ харьцааг;

б) MN ба PQ хэрчмүүдийн дунджуудын хоорондох зайг ол.

38. Призмын суурь нь $\sqrt{3}$ талтай ABC адил талт гурвалжин. AD, BE ба CF хажуу ирмэгүүд суурьт перпендикуляр. $7/2$ радиустай бөмбөлөг ABC хавтгай ба AE, BF, CD хэрчмүүдийн харгалзан A, B, C цэгүүдийн талын үргэлжлэлийг шүргэнэ. Призмын хажуу ирмэгийн уртыг ол.

39. Тэгш өнцөгт гурвалжны катетууд ямар нэг хоёр талст хурц өнцгийн талсууд дээр орших ба түүний ирмэгтэй α ба β өнцөг үүсгэнэ. Хоёр талст өнцгийн хэмжээг ол.

40. Хавтгай дөрвөн өнцөгтийн харилцан перпендикуляр хоёр хавтгай дээрх тэгш өнцөгт проекцууд 2-той тэнцүү талтай квадратууд болно. Хэрэв дөрвөн өнцөгтийн нэг тал нь $\sqrt{5}$ бол дөрвөн өнцөгтийн периметрийг ол.

41. Гурвалжин пирамидын оройн бүх хавтгай өнцгүүд тэгш. Пирамидын орой, суурийн гурвалжны медиануудын огтлолцлын цэг, пирамидийг багтаасан бөмбөлөгийн төв гурав нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

42. $ABCD$ тетраэдрт $AD \perp BC$. Тетраэдрийн B ба C оройгоос татсан өндрүүд огтлолцох ба тэдгээрийн огтлолцлын цэг нь солбисон AD ба BC шулуунуудын ерөнхий перпендикуляр дээр оршино гэж батал.

43. $ABCD$ тетраэдрын AB ирмэг CD ирмэгт, харин BC ирмэг AD ирмэгт перпендикуляр. AC ирмэг BD ирмэгт перпендикуляр гэж батал.

44. Хэрэв тетраэдрын эсрэг орших ирмэгүүд хос хосоороо перпендикуляр бол $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$ гэж батал. Урвуу нь үнэн үү?

45. $ABCD$ гурвалжин пирамидын D оройгоос буулгасан өндөр ABC гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын цэгийг дайрна. Түүнээс гадна $DB=b, DC=c, \measuredangle BDC=90^\circ$ бол ADB ба ADC талсуудын талбайнуудын харьцааг ол.

46. $ABCD$ тетраэдрийн B ба C оройнуудаас буулгасан өндрүүд огтлолцоно. $AD \perp BC$ гэж батал.

47. Хэрэв тетраэдрийн өндрүүд (эсвэл тэдгээрийн үргэлжлэлүүд) нэг цэгт огтлолцдог бол түүнийг ортоцентр тетраэдр гэнэ. $ABCD$ тетраэдр ортоцентр тетраэдр байх зайлшгүй бөгөө хүрэлцээтэй нөхцөл нь түүний эсрэг орших ирмэгүүдийн хоёр хос перпендикуляр,ө.х $AB \perp CD$ ба $AD \perp BC$ гэж батал.(Энэ тохиолдолд гурав дахь хос ирмэг бас перпендикуляр,ө.х $AC \perp BD$)

48. Тетраэдрийн эсрэг орших ирмэгүүд хос хосоороо перпендикуляр. Эсрэг орших хос ирмэг бүрийн ерөнхий перпендикуляруud нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

49. Ортоцентр тетраэдрийн эсрэг орших хос ирмэг бүрийн ерөнхий перпендикуляруud нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

50. Ортоцентр тетраэдрийн медиануудын огтлолцлын цэг, өндрүүдийн огтлолын цэг ба багтаасан бөмбөлгийн төв нэг шулуун (ортоцентр тетраэдрийн Эйлерийн шулуун) дээр оршино гэж батал.

51. Зөв гурвалжин пирамидын суурийн талууд a , хажуу ирмэг суурийн хавтгайтай 45° өнцөг үүсгэнэ.

а) пирамидийн эзэлхүүнийг;
б) хажуу талсын суурьтай үүсгэх өнцгийг;
в) солбисон ирмэгүүдийн хоорондох зайг;
г) хажуу талсуудын хоорондох өнцгийг ;
д) багтаасан бөмбөлөгийн радиусыг;
е) багтсан бөмбөлөгийн радиусыг;
ж) апофемын зэргэлдээ хажуу талстай үүсгэх өнцгийг тус тус ол.

52. Зөв дөрвөн өнцөгт пирамидын талууд a, хажуу талс суурийн хавтгайтай 90° өнцөг үүсгэнэ.

а) пирамидын эзэлхүүнийг;

б) хажуу ирмэгийн суурьтай үүсгэх өнцгийг;

в) суурийн диагональ ба түүнтэй солбисон хажуу ирмэг хоёрын хоорондох зайг;

г) эсрэг орших хжуу ирмэгүүдийн хоорондох өнцгийг;

д) зэргэлдээ хажуу талсуудын хоорондох өнцгийг;

е) багтсан бөмбөлгийн радиусыг;

ж) багтаасан бөмбөлгийн радиусыг;

з) апофемийн зэргэлдээ хажуу талстай үүсгэх өнцгийг тус тус ол.

53. Зөв зургаан өнцөгт пирамидын суурийн тал ба өндөр нь a-тай тэнцүү.

а) хажуу ирмэгийн суурьтай үүсгэх өнцгийг;

б) хажуу талсын суурьтай үүсгэх өнцгийг;

в) пирамидын орой дахь хавтгай өнцгийг;

г) зэргэлдээ хажуу талсуудын хоорондох өнцгийг;

д) багтсан бөмбөлгийн радиусыг;

е) багтаасан бөмбөлгийн радиусыг тус тус ол.

54. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ нэгж куб байг. ACB_1D_1 ба A_1C_1BD пирамидуудын ерөнхий хэсгийн эзэлхүүнийг ол.

55. Зөв дөрвөн өнцөгт пирамидын хажуу ирмэг b, харин орой дахь хавтгай өнцөг α. Пирамидыг багтаасан бөмбөлгийн радиусыг ол.

56. a-тай тэнцүү ирмэгтэй зөв тетраэдрийн бүх ирмэгийг шүргэсэн бөмбөрцгийн радиусыг ол.

57. Огторгуйн цэгээс өөр хоорондоо тэнцүү өнцөг үүсгэх дөрвөн цацраг татжээ. Эдгээр өнцгийг ол.

58. Зөв n өнцөгтийн суурьт налсан хавтгай өнцөг α . Зэргэлдээ хажуу талсуудын хоорондох хоёр талст өнцгийг ол.

59. $SABCD$ зөв пирамидын $ABCD$ суурийн тал a ба хажуу ирмэг $2a$. AD, SC ирмэгүүд дээр төгсгөлтэй SAB хавтгайтай параллель хэрчмүүд авчээ.

а) Эдгээр хэрчмүүдийн нэг нь AD ирмэгийн $AM : AD = 3 : 4$ байх M цэгийг дайрна. Түүний уртыг ол.

б) Авч үзсэн хэрчмүүдийн хамгийн бага утгыг ол.

60. $SABCD$ зөв дөрвөн өнцөгт пирамидын SA хажуу ирмэг, $ABCD$ суурийн хавтгай хоёрын хоорондох өнцөг SA ирмэг, SBC хавтгай хоёрын хоорондох өнцөгтэй тэнцүү. Энэ өнцгийг ол.

61. Параллелопипедийн бүх талс нь a-тай тэнцүү талтай, 60° хурц өнцөгтэй, тэнцүү ромбууд. Параллелопипедийн эзэлхүүнийг ол.

62. Зөв тетраэдр ба түүний өндрийн дунджид төвтэй төвийн тэгш хэм дэх энэ тетраэдрийн дүр хоёрын огтлолд үүсэх дүрсийг авав. Хэрэв тетраэдрийн ирмэг a-тай тэнцүү бол энэ дүрсийн эзэлхүүнийг ол.

63. M ба N цэгүүд зөв тетраэдрийн эсрэг орших ирмэгүүдийн дундаж. MN шулуунтай параллель хавтгай дээрх тетраэдрийн ортогональ проекц нь S талбайтай,нэг өнцөг нь 60° байх дөрвөн өнцөгт болно. Тетраэдрийн гадаргуугийн талбайг ол.

64. Нэгж кубын эсрэг орших хоёр орой цилиндрийн суурийн төвтэй давхцах ба харин бусад орой нь цилиндрийн хажуу гадаргуу дээр байрлана. Цилиндрийн өндөр ба суурийн радиусыг ол.

65. a, b солбисон шулуунууд ба a шулуунтай перпендикуляр, түүнийг A цэгт огтолдог α хавтгай өгөгджээ. a ба b шулуунуудын хоорондох зай A цэгээс b шулууны α хавтгай дээрх ортогональ проекц b' хүртлэх зайтай тэнцүү, харин b, b' шулуунуудын хоорондох өнцөг a, b шулуунуудын хоорондох өнцгийг 90° хүртэл гүйцээнэ гэж батал.

66. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ нэгж куб өгөгдөв. M нь BB_1 -ийн дундаж. AB_1 ба CM шулуунуудын хоорондох өнцөг ба зайг ол. Энэ шулуунуудын ерөнхий перпендикуляр CM хэрчмийг ямар харьцаагаар хуваах вэ?

67. 1-тэй тэнцүү ирмэг бүхий $ABCD$ зөв тетраэдрийн AB -ийн дундаж M , BC -ийн дундаж N . CM ба DN шулуунуудын хоорондох өнцөг ба зайг ол. Энэ шулуунуудын ерөнхий перпендикуляр DN хэрчмийг ямар харьцаагаар хуваах вэ?

68. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ нэгж куб өгөгдөв. Түүний AC_1 диагональтай параллель l шулуун BD, A_1D_1, CB_1 шулуунуудаас ижил зайд алслагдана. l шулуунаас энэ шулуунууд хүртлэх зайг ол.

69. Пирамид бөмбөлөгт багтах зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь энэ пирамидийн суурь тойрогт багтах явдал юм гэж батал.

70. a -тай тэнцүү ирмэгтэй $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб өгөгдөв. M ба K нь харгалзан AB ба CD ирмэгүүдийн дундаж. M, K, A_1, C_1 цэгүүдийг дайрсан бөмбөлгийн радиусыг ол.

71. Ямар нэг пирамидад бөмбөрцөг багтдаг байв. Пирамидын эзлэхүүн нь бөмбөрцгийн радиусыг пирамидын гүйцэд гадаргуугаар үржүүлсний $1/3$ -тэй тэнцүү гэж батал.

72. Гурвалжин пирамидын хоёр талс нь a -тай тэнцүү талтай адил талт гурвалжнууд болно. Нөгөө хоёр талс нь адил хажуут тэгш өнцөг гурвалжнууд. Пирамидад багтсан бөмбөрцгийн радиусыг ол.

73. r радиустай бөмбөрцөг гурвалжин пирамидын бүх хажуу талсыг түүний суурийн талуудын дунджуудад шүргэнэ. Пирамидын оройг бөмбөрцгийн төвтэй холбосон хэрчим пирамидын суурьтай огтлолцох цэгээр таллан хуваагдана. Пирамидын эзлэхүүнийг ол.

74. $SABC$ гурвалжин пирамидын SC хажуу ирмэг AB ирмэгтэй тэнцүү ба суурийн ABC хавтгайд 60° өнцгөөр нална. A, B, C оройнууд ба хажуу ирмэгүүдийн дунджууд 1 радиустай бөмбөлөг дээр оршино. Энэ бөмбөлгийн төв AB ирмэг дээр оршино гэж батлаад пирамидын өндрийг ол.

75. $PABC$ гурвалжин пирамидын хажуу ирмэг PB суурийн ABC хавтгайтай перпендикуляр ба $PB = 6, AB = BC = \sqrt{15}, AC = 2\sqrt{3}$. ABP талс дээр орших O цэгт төвтэй бөмбөлөг пирамидын бусад талсын хавтгайг шүргэнэ. Бөмбөлгийн O төвөөс AC ирмэг хүртлэх зайг ол.

76. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб өгөгдөв. Бөмбөлөг AC, B_1C, AB_1 шулуунуудыг болон BB_1 ирмэгийн B талын үргэлжлэлийг шүргэнэ. Хэрэв кубын ирмэг 1-тэй тэнцүү, харин AC шулуунтай шүргэх цэг нь кубын талсад агуулагддаг бол бөмбөлгийн радиусыг ол.

77. $SABCD$ дөрвөн өнцөгт пирамид $ABCD$ суурийн хавтгай дээр орших төвтэй бөмбөлөгт багтжээ. Суурийн AC ба BD диогоналууд H цэгт огтлолцох ба SH нь пирамидын өндөр болно. Хэрэв $CH = 4, AS = 3.75, AD = 3, AB = BS$ бол CS ба CD -г ол.

78. Бөмбөлөг $SABC$ гурвалжин пирамидын AS, BS, BC ба AC ирмэгүүдийг харгалзан K, L, M ба N цэгүүдэд шүргэнэ. Хэрэв $MN = 7, NK = 5, LN = 2\sqrt{29}$ ба $KL = LM$ бол KL-г ол.

79. $\measuredangle BAD = 60^\circ$ байх $ABCD$ ромбо суурьтай, энэ ромбын диагоналиудын огтлолцлын K цэгийг дайрсан, 1-тэй тэнцүү урттай өндөр бүхий $SABCD$ дөрвөн өнцөгт пирамидад $3/8$ радиустай бөмбөлөг байжээ. Суурийн AB, AD ирмэгүүдийн $MN = \dfrac{4\sqrt{3}}{5}$ байх M, N цэгүүдэд огтолдог, бөмбөлгийн M, N цэгүүдээс ижил зайд алслагдсан цэгт шүргэдэг, SK хэрчмийн K-ийн талын үргэлжлэлийг E цэгт огтолдог цорын ганц хавтгай оршин байна гэж батал. SE хэрчмийн уртыг ол.

80. $SABCD$ дөрвөн өнцөгт пирамидын суурь нь $ABCD$ тэгш өнцөгт. $AS = 7, BS = 2, CS = 6, \measuredangle SAD = \measuredangle SBD = \measuredangle SCD$ бол DS ирмэгийг ол.

81. Нэгж кубын доод суурийн оройг дайруулан кубд багтсан бөмбөрцгийг шүргэсэн хавтгай татжээ. Энэ хавтгай дээд сууриас S талбайтай гурвалжныг таслана. Энэ хавтгай, куб хоёрын огтлолын талбайг ол.

82. Гурвалжин пирамидын хажуу ирмэгүүд хос хосоороо перпендикуляр ба уртууд нь a, b, c-тэй тэнцүү. Багтаасан бөмбөлгийн радиусыг ол.

83. V нь тетраэдрын эзлэхүүн, a ба b нь түүний эсрэг орших ирмэгүүд, c нь тэдгээрийн хоорондох зай, α нь тэдний хоорондох өнцөг байг. $V = \dfrac{1}{6}abc\sin\alpha$ гэж батал.

84. $ABCD$ гурвалжин пирамидад $CD = a$, харин AB ирмэгийн дунджаас CD дээр буулгасан перпендикуляр b-тэй тэнцүү ба ACD, BCD талсуудтай адил α өнцөг үүсгэнэ. Пирамидын эзэлхүүнийг ол.

85. O_1, O_2 цэгүүдэд төвтэй,харгалзан 3 ба 1 радиустай бөмбөлгүүд хоорондоо шүргэлцэнэ. O_2 цэгээс 2 зайд орших M цэгийг дайруулан тус бүрдээ хоёр бөмбөлгийг шүргэдэг хоёр шулуун татсан ба шүргэлтийн цэгүүд нь шулуун бүр дээрээ M цэгийн нэг талд оршино. Шүргэгч шулуунуудын нэг нь O_1O_2 шулуунтай 45° өнцөг үүсгэдэг бол шүргэгчүүдийн хоорондох өнцгийг ол.

86. Гурвалжин пирамидын эсрэг ирмэгүүд хос хосоороо тэнцүү. Багтсан ба багтаасан бөмбөлгүүдийн төвүүд давхцахыг батал.

87. Тетраэдрийн бүх талс тэнцүү байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь дараах нөхцлүүдийн нэг нь гэдгийг батал:

а) эсрэг ирмэгүүдийн дунджуудыг холбосон хэрчмүүд хос хосоороо перпендикуляр,

б) бүх талсын талбай тэнцүү,

в) медиануудын огтлолын цэг багтаасан бөмбөлгийн төвтэй давхцдаг.

88. $ABCD$ гурвалжин пирамид өгөгдөв. Солбисон AC ба BD ирмэгүүд перпендикуляр. Мөн солбисон AD ба BC ирмэгүүд перпендикуляр, харин $AB = CD$. Энэ пирамидын бүх ирмэг r радиустай бөмбөрцгийг шүргэнэ. ABC талсын талбайг ол.

89. O цэгт төвтэй бөмбөлөг $ABCD$ гурвалжин пирамидын A, B, C оройнуудыг дайрах ба AD, BD, CD шулуунуудыг харгалзан K, L, M цэгүүдэд огтлоно. $AD = 10, BC : BD = 3 : 2$ ба $AB : CD = 4\sqrt{3} : 11$ гэж мэдэгдэж байна. O цэгийн ABD, BCD, CAD хавтгайнууд дээрх проекцууд нь харгалзан AB, BC, AC

ирмэгүүдийн дундаж. AB ба CD ирмэгүүдийн дунджуудын хоорондох зай 13-тай тэнцүү. KLM гурвалжны периметрийг ол.

90. Зөв тетраэдрын ирмэг a-тай тэнцүү. Тетраэдрын оройг дайруулан гурвалжин байх огтлол татжээ. Огтлолын периметр P нь $2a < P \le 3a$ тэнцэтгэл бишийг хангана гэж батал.

91. $SABC$ гурвалжин пирамидын B ба C орой тус бүр дэх гурван хавтгай өнцгийн нийлбэр 180° ба $SA = CB$. Хэрэв SBC талсын талбай 100, харин багтаасан бөмбөлгийн төвөөс суурийн ABC хавтгай хүртэлх зай 3-тай тэнцүү бол пирамидын эзлэхүүнийг ол.

92. 4-тэй тэнцүү ирмэгтэй $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб өгөгджээ. BC ирмэгийн дундаж дээр M цэг, харин A_1D_1 ирмэг дээр A_1 оройгоос 1 зайд N цэг авав. M ба N цэгүүдийн хоорондох кубын гадаргуу дээгүүрх хамгийн богино замын уртыг ол.

93. $ABCD$ тетраэдр гадаргуууг AD, BD, CD ирмэгүүдийн дагуу зүсээд ABC хавтгай дээр дэлгэвэл a-тай тэнцүү талтай квадрат үүснэ. Тетраэдрийн эзлэхүүнийг ол.

94. $ABCS$ пирамидын суурь нь $4\sqrt{2}$ талтай ABC адил талт гурвалжин. SC хажуу ирмэг суурийн хавтгайтай перпендикуляр ба 2-той тэнцүү. Нэг нь S цэг ба BC ирмэгийн дунджийг дайрсан, нөгөө нь C цэг ба AB ирмэгийн дунджийг дайрсан хоёр шулууны хоорондох өнцөг ба зайг ол.

95. $SABCD$ пирамидын суурь нь $ABCD$ параллелограмм байна. AD шулуун ба SC ирмэгийн дунджийг дайрсан хавтгай пирамидын эзлэхүүнийг ямар харьцаагаар хуваах вэ?

96. $ABCD$ гурвалжин пирамидын DC ирмэг дээр N цэгийг $CN = 2DN$ байхаар авав. CA ирмэгийн A цэгийн талын үргэлжлэл дээр K цэг $AC = 2AK$ байхаар, CB ирмэгийн B цэгийн талын үргэлжлэл дээр M цэг $BM = 2BC$ байхаар оршино. MNK хавтгай $ABCD$ пирамидын эзлэхүүнийг ямар харьцаагаар хуваах вэ?

97. $SABCD$ пирамидын суурь нь $ABCD$ параллелограмм байна. N цэг AS ирмэгийн дундаж, K цэг BSC гурвалжны SP медианы дундаж, харин M цэг SB ирмэг дээр $SM = 5MB$ байхаар байрлана. MNK хавтгай $ABCD$ пирамидын эзлэхүүнийг ямар харьцаагаар хуваах вэ?

98. $ABCD$ гурвалжин пирамидын BC ба DC ирмэгүүд дээр харгалзан N ба K цэгүүд $CN = 2 \cdot BN$ ба $DK : KC = 3 : 2$ байхаар байрлана. M нь ABD гурвалжины медиануудын огтлолцлын цэг. MNK хавтгай $ABCD$ пирамидын эзлэхүүнийг ямар харьцаагаар хуваах вэ?

99. $SABCD$ пирамидын суурь нь $ABCD$ параллелограмм. AB ба SC ирмэгүүд дээр харгалзан K ба M цэгүүд $AK : KB = CM : MS = 1 : 2$ байхаар байрлана. K ба M цэгүүдийг дайрсан. BD шулуунтай параллель хавтгай $SABCD$ пирамидын эзлэхүүнийг ямар харьцаагаар хуваах вэ?

100. Паралелограмм суурьтай дөрвөн өнцөгт пирамидын хажуу талсуудаар түүнээс хоёр дахин бага эзлэхүүнтэй гурвалжин пирамид байгуулж болно гэж батал.

101. Тетраэдрын ирмэг дэх хоёр талт өнцгийн биссектрис хавтгай эсрэг орших ирмэгийг энэ өнцгийг үүсгэж байгаа хоёр талсын талбайнуудтай пропорциональ хэрчмүүдээр хуваана гэж батал.

102. Гурвалжин пирамидын эсрэг хоёр ирмэгийн дунджийг дайрсан хавтгай түүний эзлэхүүнийг таллан хуваана гэж батал.

103. M ба N цэгүүд $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелопипедийн харгалзан AA_1 ба CC_1 ирмэгүүдийн дундаж. A_1C, B_1M ба BN шулуунууд хос хосоороо перпендикуляр. Хэрэв $A_1C = a, B_1M = b, BN = c$ бол параллелопипедийн эзлэхүүнийг ол.

104. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелопипед өгөгдөв. AB, AA_1, AD ирмэгүүдийн B, A_1, D цэгүүдийн талуудын үргэлжлэл дээр харгалзан $3AB/2$, $3AA_1/2$, $3AD/2$ -тай тэнцүү BP, A_1Q, DR хэрчмүүд таслан авав. PQR хавтгай параллелопипедийн эзэлхүүнийг ямар хаьцаагаар хуваах вэ?

105. Кубын диагональтай перпендикуляр,түүнийг а) $2:1$, б) $3:1$ харьцаагаар хуваадаг хавтгай кубын эзэлхүүнийг ямар харьцаагаар хуваах вэ?

106. $ABCD$ тетраэдрийн эсрэг орших AB ба CD ирмэгүүдтэй параллель хоёр хавтгай BC ирмэгийг гурван тэнцүү хэсэгт хуваана. Тетраэдрийн эзэлхүүний ямар хэсэг нь энэ хоёр хавтгайн хооронд хашигдах вэ?

107. Тетраэдрийн солбисон хоёр ирмэгийн уртын харьцаа k байв. Энэ ирмэгүүдтэй параллель хавтгайг огтлолд нь ромбо үүсэхээр татав. Энэ хавтгай тетраэдрийн эзэлхүүнийг ямар харьцаагаар хуваах вэ?

108. Гурван бөмбөлөг хос хосоороо гаадаад байдлаар шүргэлцэх ба ямар нэг хавтгайг тэгш өнцөгт гурвалжны оройнуудад шүргэх бөгөөд энэ гурвалжны нэг катет нь 1-тэй тэнцүү, түүний эсрэг орших өнцөг 30° болно.Бөмбөрцгүүдийн радиусыг ол.

109. r радиустай бөмбөлөг гурвалжин пирамидын бүх ирмэгийг шүргэх ба түүний төв нь пирамидын өндөр дээр оршино. Пирамид зөв гэдгийг баталж, хэрэв бөмбөлгийн төв пирамидын оройгоос $r\sqrt{3}$ зайтай бол пирамидын өндрийг ол.

110. Бүх хавтгай өнцөг нь α -тай тэнцүү гурван талст өнцөгт бүх ирмэгийг нь шүргэсэн бөмбөлөг байрлажээ. Гурван талст өнцгийн талсууд бөмбөлгийг R радиустай тойргуудаар огтолно. Бөмбөлгийн радиусыг ол.

111. Параллелопипедэд бөмбөрцөг багтах зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь парөллелопипедийн бүх талс тэнцүү талбайтай байх гэж батал.

112. R радиустай сууриудтай, өндрүүдийнх нь нийлбэр $3/4$ байх гурван конус α хавтгайн нэг талд байрлах ба суурь нь энэ хавтгай дээр оршино. Конусуудын суурийн тойргууд хос хосоороо шүргэлцэнэ. Конусуудын хооронд оршдог α хавтгайг болон гурван конусын хажуу гадаргууг шүргэдэг бөмбөрцгийн радиусыг ол.

113. $SABC$ зөв пирамидын ABC суурийн тал a -тай,хажуу ирмэг $2a$ -тай тэнцүү. S, B, C цэгүүд A цэгт оройтой конусын хажуу гадаргуу дээр оршино. Конусын тэнхлэг огтлолын орой дахь өнцгийг ол.

114. $SABCD$ зөв пирамидын бүх орой SAB хавтгайтай перпендикуляр тэнхлэг бүхий цилиндрийн хажуу гадаргуу дээр оршино. Хэрэв $AB = a$ бол цилиндрийн суурийн радиусыг ол.

115. $SABCD$ зөв дөрвөн өнцөгт пирамидын суурийн талууд a -тай,хажуу ирмэгүүд $5a/2$ -тай тэнцүү. Цилиндрийн нэг суурь нь SAB хавтгайд орших ба нөгөө суурь нь пирамидын огтлолд багтана. Цилиндрийн хажуу гадаргуугийн талбайг ол.

116. Цилиндрийн өндөр $3r$ -тэй тэнцүү. Цилиндр дотор r радиустай гурван бөмбөлөг, бөмбөлөг бүр нөгөө хоёрыгоо болон цилиндрийн хажуу гадаргууг шүргэж байхаар байрлажээ.Хоёр бөмбөлөг нь цилиндрийн доод суурийг, гурав дахь нь дээд суурийг шүргэдэг бол цилиндрийн суурийн радиусыг ол.

117. $ABCA_1B_1C_1$ зөв призмийн ирмэг бүхэн a урттай. A, A_1 оройнууд цилиндр гадаргуугийн хажуу гадаргуу дээр орших ба BCC_1 хавтгай энэ гадаргууг шүргэнэ. Цилиндрийн тэнхлэг B_1C шулуунтай параллель. Цилиндрийн суурийн радиусыг ол.

118. 2-той тэнцүү радиустай бөмбөлөг дээр 1 радиустай тус бүр нь нөгөө хоёроо шүргэдэг гурван тойрог байрлажээ. Өгөгдсөн бөмбөлөг дээр оршдог, өгөгдсөн тойргуудыг бүгдийг нь шүргэдэг, тэдгээрээс бага радиустай тойргийн радиусыг ол.

119. Зөв тетраэдрийн нэг орой цилиндрийн тэнхлэг дээр, бусад оройнууд энэ цилиндрийн хажуу гадаргуу дээр оршино. Энэ цилиндрийн суурийн радиус R бол тетраэдрийн ирмэгийг ол.

120. $SABCD$ зөв пирамидын $ABCD$ суурийн A орой конусын оройтой давхцдаг, B, D оройнууд түүний хажуу гадаргуу дээр, S орой суурийн тойрог дээр, харин C орой суурийн хавтгайд оршино. Конусын эзэлхүүнийг пирамидын эзэлхүүнд харьцуулсан харьцааг ол.

121. Конусын тэнхлэг огтлолын орой дахь өнцөг 60°-тай тэнцүү. Конус дотор 1 радиустай гурван бөмбөлөг байрлажээ. Бөмбөлөг бүхэн нөгөө хоёроо, конусын суурь болон хажуу гадаргууг шүргэнэ. Конусын суурийн радиусыг ол.

122. 1 радиустай дөрвөн бөмбөлөг хос хосоороо бие биеэ шүргэнэ.

123. дөрвөн бөмбөлгийг бүгдийг нь шүргэдэг бөмбөлгийн радиусыг;

124. б) гурав нь нэг суурийг нь ба хажуу гадаргууг нь, дөрөв дэх нь нөгөө суурийг нь шүргэж байхаар энэ бөмбөлгүүдийг агуулсан цилиндрийн өндрийг;

125. в) бүгд хажуу гадаргууг нь, гурав нь суурийг шүргэж байхаар энэ бөмбөлгүүдийг агуулсан конусын өндрийг тус тус ол.

126. Конус дотор таван тэнцүү бөмбөрцөг багтжээ. Тэдгээрийн дөрөв нь конусын суурь дээр орших ба тус бүр нь энэ дөрвийнхөө хоёрыг болон конусын хажуу гадаргууг шүргэнэ. Тав дахь бөмбөрцөг конусын хажуу гадаргууг болон бусад дөрвийгөө шүргэнэ. Хэрэв бөмбөрцөг бүрийн радиус r-тэй тэнцүү бол конусын эзэлхүүнийг ол.

127. Огторгуй дахь цэгийг дөрвөн бөмбөрцгөөр хааж болох уу?

128. Хэрэв конусын гадаргуу дээр харилцан перпендикуляр гурван байгуулагч татаж болно гэвэл энэ конусын тэнхлэг огтлолын орой дахь өнцгийг ол.

129. Ерөнхий оройтой, 2-той тэнцүү өндөртэй, 1-тэй тэнцүү радиус бүхий суурьтай тэнцүү хоёр конус ямар нэг байгуулагчаараа шүргэлцсэн ба хажуу гадаргуугаараа ямар нэг α хавтгайг шүргэжээ. Конусуудын суурийн хавтгайнууд l шулуунаар огтлолцоно. l шулуун ба α хавтгайнуудын хоорондох өнцгийг ол.

130. Тэнцүү хоёр конус ерөнхий оройтой ба ерөнхий байгуулагчаараа шүргэлцжээ. Конус бүрийг огтлох тэнхлэг огтлол дахь өнцөг 60°. Хоёр конусыг хоёуланг нь шүргэсэн, гэхдээ ерөнхий байгуулагчийг дайраагүй хоёр хавтгайн хоорондох өнцгийг ол.

131. Хавтгай дээр ерөнхий оройтой тэнцүү гурван конус хэвтэж байна. Тус бүр нь зэргэлдээ хоёрыгоо шүргэнэ. Конусуудын орой дахь өнцгийг ол.

132. Ерөнхий D оройтой хоёр тэнцүү конус α хавтгайн хоёр талд,энэ хавтгайг харгалзан DE ба DF байгуулагчаараа шүргэн байрлажээ. DEF өнцөг γ-тай тэнцүү, харин конусуудын суурийн хавтгайнууд огтлолын шулууны α хавтгайтай үүсгэх өнцөг β-тай тэнцүү гэвэл конусуудын өндөр ба байгуулагч хоёрын хоорондох өнцгийг ол.

133. Хоёр конус ерөнхий оройтой ба нэгдүгээр конусын байгуулагч хоёрдугаар конусын өндөр болно. Нэгдүгээр конусын тэнхлэг огтлолын оройн өнцөг $\arccos\frac{1}{3}$, харин хоёрдугаар конусынх $\frac{2\pi}{3}$-тай тэнцүү. Конусуудын хажуу гадаргуугийн огтлолд үүсэх байгуулагчуудын хоорондох өнцгийг ол.

134. Тэнхлэг огтлолынхоо оройд α ($\alpha < \frac{2\pi}{3}$) өнцөгтөй гурван тэнцүү конус ерөнхий оройтой ба бие биеэ k, l, m байгуулагчуудаар гадаад талаараа шүргэнэ. l ба k хоёрын хоорондох өнцгийг ол.

135. Зөв дөрвөн өнцөгт пирамид дотор r радиустай, пирамидын тэгш хэмийн тэнхлэг дээр орших төвтэй ижилхэн хоёр бөмбөрцөг байрлажээ. Нэг бөмбөрцөг нь пирамидын бүх хажуу гадаргууг шүргэх ба харин хоёрдугаар нь пирамидын суурь ба нэгдүгээр бөмбөрцгийг шүргэнэ. Пирамидын эзэлхүүн хамгийн бага байх үеийн өндрийг ол.

136. $PABC$ зөв пирамидын ABC суурийн тал a-тай, хажуу ирмэг b-тэй тэнцүү. BC ба PA ирмэгүүдтэй параллель пирамидын огтлолыг энэ огтлолын талбай хамгийн их байхын тулд BC шулуунаас ямар зайд татах вэ?

137. $ABCD$ тетраэдрийн AB ирмэг нь дөрвөн өнцөгт пирамидын суурийн диагональ, CD ирмэг нь энэ суурийн нөгөө диагональтай параллель ба түүний төгсгөлүүд нь пирамидын хажуу ирмэгүүд дээр оршино. Хэрэв тетраэдрийн эзэлхүүн V бол пирамидын эзэлхүүний боломжтой хамгийн бага утгыг ол.

138. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ зөв призм өгөгджээ. Түүний суурийн тал $2a$ урттай,хажуу ирмэг a урттай. AA_1D_1D талсын AD_1 диагональ ба призмын AA_1B_1B хавтгайтай параллель DB_1 диагональ дээр төгсгөлүүдтэй хэрчмүүдийг авъя.

139. Тэдгээр хэрчмүүдийн нэг нь AD_1 диагоналийн $AM : AD_1 = 2:3$ байх M цэгийг дайрчээ. Түүний уртыг ол.

140. б) Авч үзсэн хэрчмүүдийн уртуудын хамгийн багыг ол.

141. Тетраэдрийн аль ч талсын талбай нь үлдсэн гурван талсуудын талбайн нийлбэрээс бага гэж батал.

142. Зөв тетраэдрын хавтгай дээрх проекцын талбай энэ хавтгай тетраэдрын солбисон хоёр ирмэгтэй парллель байх үед хамгийн их байна гэж батал.

143. Огторгуйн дөрвөн өнцөгтийн өнцгүүдийн нийлбэр 360°-аас хэтрэхгүй гэж батал.

144. Гурванталст өнцгийн дотоод хоёр талст өнцгүүдийн нийлбэр π-ээс их, 3π-ээс бага гэж батал.

145. **Гурван талст өнцгийн косинусын теорем.**

146. Хэрэв α, β, γ нь гурван талст өнцгийн хавтгай өнцгүүд, харин A, B, C нь тэдгээрийн эсрэг орших хоёр талст өнцгүүд бол $\cos A = \dfrac{\cos\alpha - \cos\beta \cdot \cos\gamma}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}$.

147. MC нь ABC гурвалжны хавтгайд перпендикуляр байг. $\measuredangle AMB < \measuredangle ACB$ байх нь үнэн үү?

148. Гүдгэр олон талст өнцгийн хавтгай өнцгүүдийн нийлбэр 360°-аас бага гэж батал.

149. **Тетраэдрийн косинусын теорем.**

150. Тетраэдрийн аль ч талсын талбайн квадрат нь үлдсэн гурван талсын талбайнуудын квадратуудын нийлбэрээс эдгээр талсуудыг хос бүрийнх нь талбайн үржвэрийг тэдгээрийн хавтгайнуудын хоорондох хоёрталст өнцгийн косинусаар үржүүлж хассантай тэнцүү,ө.х

151. $S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_1S_2\cos\alpha_{12} - 2S_1S_3\cos\alpha_{13} - 2S_2S_3\cos\alpha_{23}$.

152. $ABCD$ тетраэдрын A орой дахь бүх хавтгай өнцөг 60° -тай тэнцүү. $AB + AC + AD \le BC + CD + DB$ гэж батал.

153. $ABCD$ пирамидын суурь нь ABC зөв гурвалжин. $\measuredangle BAD = \measuredangle CBD = \measuredangle ACD$ бол пирамид зөв гэж батал.

154. **Кавальерийн зарчим.** Хэрэв огторгуйд геометрийн хоёр биетийг ямар нэг бэхлэгдсэн хавтгайтай параллель дурын хавтгайгаар огтлоход тэнцүү талбайтай хавтгай дүрсүүд үүсдэг бол өгөгдсөн биетүүд тэнцүү эзэлхүүнтэй байна. Кавальерийн зарчмийн тусламжтай бөмбөлгийн эзэлхүүнийг гарга.

155. Нэг гүдгэр олон өнцөгт нөгөөгийнхөө дотор оршино. Гадаад талын олон өнцөгтийн гадаргуугийн талбай дотоод талын олон өнцөгтийн гадаргуугийн талбайгаас их гэж батал.

156. Бөмбөрцөгийн тайрдасны (параллель хоёр огтлогч хавтгайн хооронд орших бөмбөрцгийн хэсэг) бөмбөгөр гадаргуу $2\pi Rh$ гэж батал,энд R – бөмбөрцгийн радиус, h -тайрдасны өндөр (огтлогч хавтгайнуудын хоорондох зай).