# Монголын Математикийн 43-р Олимпиадын дvнгийн тухай тайлан

Ц.Дашдорж

Эрхэм хүндэт математикч багш сурагчид аа!

Эхлэл сургуулийн хамт олон

Монголын Математикийн 43-р Олимпиад математикаар тэргүүлэх сургуулиудын нэг болох ”Эхлэл" сургуулийн нэрэмжит болон 2007 оны 05 сарын 3-наас 05 сарын 08-ны хооронд ”Эхлэл сургууль” дээр амжилттай явагдаж дүнгээ гаргаж байна. Энэ удаагийн олимпиадад 21 аймаг, Улаанбаатар хот ба ” Эхлэл” сургуулийн нийт 23 багийн 67 бага, дундын багш, 251 сурагчид оролцож нийт 318 хүн оюун ухаан, авъяас чадвараа сорин уралдлаа. Энэ удаагийн олимпиадыг зохион байгуулахад ”Эхлэл" сургуулийн хамт олны оруулсан хувь нэмэрийг үнэлж барашгүй юм, тухайлбал тус сургуулийн захирал Монгол Улсын аврага математикч багш А.Энхжаргал түүний эхнэр Энхтуул, тус сургуулийн сургалтын албаны дарга Лхамноржмаа, ахлах багш Адилбиш, Пүрэвжав, багш Орхонбаатар, Наранбат, Ариунболд нар хамт олноо хошуучлан ажилласныг онцлон тэмдэглэе. Мөн сэтгэл санаагаар дэмжиж, санхүүгийн туслалцаа үзүүлсэн 1997 онд 11-р сургуулийг төгссөн А.Энхжаргал багштай 10а ангийн хамт олон 550,000төг 30.000иен, 1981 онд 41-р сургуулийг төгссөн М.Адилбиш багштай 10в ангийн хамт олон 300.000төг, "Эхлэл" сургуулийн эцэг эхчүүд 400,000төг, "Номун" клиникийн эмнэлгийн захирал Д.Энхцэцэг 350,000төг, 1991оны 1-р сургуулийн математикийн ангийг төгсөгчид OLLOO. mn-компьютер 4 ширхэг, бугуйн цагны төрөлжсөн дэлгүүр " Time Shop"-ын эзэн Б.Мөнхжаргал (1992 онд УБИС-ийн тооны ангийн төгсөгч) 9цаг, 40.000 төгрөг "Номуун" сургуулийн захирал Эрдэнээ 100,000төг, "Гэгээрэл" сургуулийн захирал Батсайхан 100,000төг, "Эхлэл" сургууль 3,500,000 төг Нэрмөнх 120,000 төг, Чимэдцэрэн 100,000төг тус тус хандивлалаа. Дээрх нэр бүхий нийт хамт олон, сайн санаат дэмжигчиддээ Монголын нийт Математикчдын нэрийн өмнөөс талархал илэрхийлье.

Олимпиадад 8-р ангийн 89 сурагч оролцсоноос 11-р сургуулийн сурагч Н. Батзоригт (багш Х.Нармандах) 29 оноогоор 1-р байр эзэлж 8-р ангийн аварга боллоо.11-р сургуулийн З.Болор-Эрдэнэ (Х.Нармандах), 28.5 оноо, мөн 11-р сургуулийн М.Молор-Эрдэнэ (Х.Нармандах) 27 оноогоор, 2-р байрыг, 1-р сургуулийн сурагч Л.Энхжаргал (Наранхүү) 23 оноогоор, 1-р сургуулийн Б.Зулсар (Бат-Эрдэнэ) 22.5 оноогоор, мөн 1-р сургуулийн Г.Мөнхболд (Бат-Эрдэнэ) 21 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Олимпиадад 9-р ангийн 57 сурагч оролцсоноос "Олонлог" сургуулийн О.Өлзийбаяр (багш Ганболд) 22 оноогоор 1-р байр эзэлж 9-р ангийн аварга сурагч боллоо. Өвөрхангай аймгийн Б.Лувсанбямба() 21 оноогоор, 1-р сургуулийн О.Зоригоо (Самданпэрэнлэй) 20.5 оноогоор, 2-р байрыг, Б.Билгүүн (Самданпэрэнлэй) 15.5 оноогоор, 1-р сургуулийн сурагч И.Цогбаяр (Самданпэрэнлэй)13.5 оноогоор "Олонлог" сургуулийн О.Соёлмаа (Ганболд) 12.5 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Олимпиадад 10-р ангийн нийт 59 сурагч оролцсоноос 1-р сургуулийн сурагч Э.Тэмүгэ (багш Баянбат) 33.5 оноогоор 1-р байр эзэлж Улсын математикийн 43-р олимпиадын 10-р ангийн аварга сурагч боллоо. "Олонлог" сургуулийн Э.Энхзаяа (Ганболд), 1-р сургуулийн Г.Оюундарь (Баянбат) нар тус бүр 24 оноогоор 2-р байрыг, 11-р сургуулийн Г. Жавхлан-Очир (Батзаяа) 21.5 оноогоор, 11-р сургуулийн Г.Бямбасүрэн (Буянтогтох) 19 оноогоор, 84-р сургуулийн П.Чинзориг () 18 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Олимпиадад 11-р ангийн нийт 46 сурагч оролцсоноос "Олонлог" сургуулийн Б.Сумъяа (багш Ганбилэг) 23 оноогоор 1-р байр эзэлж Улсын математикийн 43-р олимпиадын 11-р ангийн аврага сурагч боллоо. 1-р сургуулийн Н.Бямбажав (Баянбат )17.5 оноогоор, Увс аймгийн Н.Балжинням (Р.Одгэрэл) 17 оноогоор 2-р байрыг 1-р сургуулийн Н.Гансоронзон (Бат-Эрдэнэ)15 оноогоор Хөвсгөл аймгийн Б.Цэнд-Аюуш (Адъяахүү) 9.5 оноогоор "Мон-Турк" сургуулийн Б.Хүдэр (Дашдорж) 8.5 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Улсын Математикийн 43 дугаар олимпиадад амжилттай оролцсон дээрх нэр бүхий сурагчид, олимпиадад сурагчдаа амжилттай бэлтгэж оролцуулсан багш нар болон сургуулиудын олимпиадыг зохион байгуулах хороо болон нийт математикчдын нэрийн өмнөөс чин сэтгэлийн талархал илэрхийлье.

Багш нарын олимпиадыг бага, дунд гэсэн хоёр ангилалаар явуулсны дотроос бага ангийн математикийн 30 багш оролцсоноос, ”Олонлог” сургуулийн багш П.Чимэг 30 оноогоор түрүүлж, Сэлэнгэ аймгийн багш Г.Түмэндэлгэр 25 оноогоор, ”Эхлэл” сургуулийн багш Т.Наранбат 22 оноогоор удаах байруудад орлоо.

Дунд ангийн багш нарын олимпиадад нийт 37 багш оролцсоноос ”Олонлог” сургуулийн багш Б.Ганбилэг 29.5 оноогоор түрүүлж, "Эхлэл" сургуулийн багш Т.Хулан 24.5 оноогоор, Увс аймгийн багш Р.Одгэрэл 23 оноогоор удаах байруудыг эзлэв. Олимпиадад олон жил тогтмол амжилттай оролцож буй 11-р сургуулийн багш Сүрэнхорлоод ММО-43-ын тусгай шагналыг олгох нь зүйтэй гэж ММОХороо үзлээ.

Багийн дүнгээр аймаг хотуудыг байр эзлүүлэхэд Ч.Даваадорж ахлагчтай УБ хот дундаж оноо 16,15-аар 1-р байр, Р.Одгэрэл ахлагчтай Увс аймаг дундаж оноо 15,42-ээр 2-р байр, Т.Хулан ахлагчтай ” Эхлэл” сургуулийн дундаж оноо 11,92-оор 3-р байр, Г. Адъяахүү ахлагчтай Хөвсгөл аймаг дундаж оноо 11,17-оор 4 -р байранд шалгарлаа.

ММО-43-д 1-р сургууль 10 медаль, "Олонлог" сургууль 6 медаль, 11-р сургууль 5 медаль, "Эхлэл" сургууль 2 медаль Увс 2 медаль, Сэлэнгэ, Хөвсгөл, Өвөрхангай, УБ-ын Монгол-Турк сургууль, 84-р сургууль тус бүр 1 медаль авч олимпиадад оролцогчдоо хошуучлан сайхан амжилт гаргалаа.

УБ хотын 1-р сургуулийн 10-р ангийн сурагч Энхбаатарын Тэмүгэ "Эхлэл" сургуулийн нэрэмжит ММО-43-ын үнэмлэхүй аваргаар шалгарлаа.

"Эхлэл" сургуулийн нэрэмжит ММО-43-ын П.Энхболд уран бодолтын шагналтнаар Өвөрхангай аймгийн 9-р ангийн сурагч Б.Лувсанбямба, УБ 1-р сургуулийн 10-р ангийн сурагч Э. Тэмүгэ, Э.Энхзаяа "Олонлог" сургуулийн 11-р ангийн сурагч Б.Сумъяа нар шалгарлаа.

Энэ жилийн 7-р сард Вьетнам улсын Ханой хотод болох ОУМО-48-ийн бэлтгэлд "Олонлог" сургуулийн 11-р ангийн сурагч Б.Сумъяа 1-р сургуулийн Н.Бямбажав, Увсын Н.Балжинням 1-р сургуулийн Н.Гансоронзон, Хөвсгөлийн Б.Цэнд-Аюуш "Монтурк" сургуулийн Б.Хүдэр, 1-р сургуулийн 10-р ангийн сурагч Э.Тэмүгэ нарыг үлдээхээр Олимпиадын хороо шийдвэрлэлээ.

ОУМО-48-ийн бэлтгэлд багтаж шалгарсан та бүхэндээ амжилт хүсч, Монголынхоо нэрийг дэлхийн тавцанд дуурсгах хүндтэй бөгөөд хариуцлагатай үйл хэргийн төлөө идэвхи чармайлт гарган сайн бэлтгэж амжилттай оролцохыг Монголын нийт Математикчдын нэрийн өмнөөс даалгаж байна.

Эрдэм оюун дэлгэрч Монголд математикчдын оюун ухаан улам хөгжин дэвших болтугай. Анхаарал тавьсан та бүхэнд баярлалаа.

`Улаанбаатар хот, 2007.05.08`

# Монголын Математикийн XLIII Олимпиадын багийн нэгдсэн дүн

| № | Аймгийн нэр | VIII | IX | X | XI | Бага | Дунд | нийт | дундаж оноо | Байр |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Улаанбатар | 207.5 | 106 | 173 | 103.5 | 83 | 134.5 | 807.5 | 16.15 | I |
| 2 | Увс | 20.5 | 7.5 | 17.5 | 17 | 7 | 23 | 92.5 | 15.42 | II |
| 3 | Эхлэл | 16.5 | 3.5 | 5 | 0 | 22 | 24.5 | 71.5 | 11.92 | III |
| 4 | Хөвсгөл | 8 | 10 | 16 | 9.5 | 18 | 5.5 | 67 | 11.17 | IV |
| 5 | Орхон | 7.5 | 2 | 9 | 7.5 | 15 | 17 | 58 | 9.67 | V |
| 6 | Өвөрхангай | 10 | 21 | 7 | 0.5 | 8 | 1 | 47.5 | 7.92 | |
| 7 | Ховд | 11 | 3.5 | 14 | 0 | 13 | 1.5 | 43 | 7.17 | |
| 8 | Сэлэнгэ | 3 | 0.5 | 9 | 1 | 25 | 1.5 | 40 | 6.67 | |
| 9 | Архангай | 16 | 2 | 7 | 7 | 4 | 3 | 39 | 6.50 | |
| 10 | Дархан-Уул | 5.5 | 7.5 | 9 | 8 | 8 | 0.5 | 38.5 | 6.42 | |
| 11 | Дорноговь | 17.5 | 3 | 3 | 0.5 | 7 | 0.5 | 31.5 | 5.25 | |
| 12 | Дундговь | 8.5 | 7 | 4.5 | 0.5 | 3 | 0 | 23.5 | 3.92 | |
| 13 | Баян-Өлгий | | 0 | 16.5 | 0 | 4 | 2 | 22.5 | 3.75 | |
| 14 | Дорнод | 0.5 | 8.5 | 1.5 | 1.5 | 8 | 1 | 21 | 3.50 | |
| 15 | Өмнөговь | 1.5 | 0 | 0.5 | 0 | 16 | 2 | 20 | 3.33 | |
| 16 | Завхан | 5 | 1 | 2 | 0 | 8 | 1 | 17 | 2.83 | |
| 17 | Төв | 0 | 0.5 | 4 | 0 | 9 | 0.5 | 14 | 2.33 | |
| 18 | Хэнтий | 0.5 | 1 | 4 | 1 | 5 | 0 | 11.5 | 1.92 | |
| 19 | Говьсүмбэр | 0 | 0.5 | 2 | 7 | 1 | 1 | 11.5 | 1.92 | |
| 20 | Сүхбаатар | | 2 | | 0 | 2 | 7 | 11 | 1.83 | |
| 21 | Баянхонгор | | 0 | | 7 | 4 | | 11 | 1.83 | |
| 22 | Булган | | 0.5 | | 0.5 | | | 1 | 0.17 | |
| 23 | Говь-Алтай | | 0.5 | | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 0.08 | |

## ММО-43, VII АНГИЙН III ДАВААНЫ БОДЛОГО

Б.Сандагдорж (МУБИС), Э.Азжаргал (МУБИС)

**VII-A1 (Б.Сандагдорж).** $\dfrac{469}{1998}$ бутархайн таслалаас хойших 2007 дахь цифрийг ол.

**VII-A2 (Б.Сандагдорж).** $x, y$ бодит тоонуудын хувьд $x^2+xy+y^2=4$ ба $x^4+x^2y^2+y^4=8$ байдаг бол $x^6+x^3y^3+y^6$ илэрхийлэлийн утгыг ол.

**VII-A3 (Б.Сандагдорж).** $9\times9$ тавлицад 1-ээс 81 хүртэлх тоог бичив. Тоонуудыг яаж ч байрлуулсан бичигдсэн тоонуудын ялгавар нь 6-аас багагүй байх хөрш хоёр нүд олдохыг батал. (Ерөнхий талтай нүднүүдийг хөрш нүд гэнэ.)

**VII-B1 (Ч.Гантөмөр).** $x+y+z+xy+yz+zx+xyz$ илэрхийллийн утга $\overline{xyz}$ гэсэн 3 оронтой тоо гарав. Уг гурван оронтой тоонуудыг ол.

**VII-B2 (Б.Сандагдорж).** Ангийн нийт сурагчдын 95,5 хувиас багагүй, 96,5 хувиас хэтрэхгүй дугуйланд хичээллэдэг бол анги хамгийн цөөндөө хэдэн сурагчтай вэ?

**VII-B3 (Ч.Гантөмөр).** 100-аас 10000 хүртлэх натурал тоонууд дотор яг гурван цифр нь ижил тоо хичнээн байх вэ?

**VII-A1.** $\dfrac{469}{1998} = 469 : 1998 = 0,2347347...$ гэж бичигдэх буюу таслалаас хойш 2-ын цифр, 347 гэсэн гурван оронтой тоо давтагдана. $2006 = 3\cdot668+2$ буюу 2007 дахь цифр нь 4 байна.

**VII-A2.** $x^4+x^2y^2+y^4=8$-ийг хувиргая.

$$8 = x^4+x^2y^2+y^4 = (x^2+y^2)^2-(xy)^2 =$$
$$= (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) = 4\cdot(x^2-xy+y^2)$$

буюу $x^2-xy+y^2=2$ болно.

$\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 \\ x^2-xy+y^2=2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=3; xy=1$ гэж гарна.

$$x^6+x^3y^3+y^6 = (x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)+x^3y^3 =$$
$$= 3(x^4-x^2y^2+y^4)+1 = 3((x^2+y^2)^2-3x^2y^2)+1 = 3(3^2-3)+1 = 19$$

болно.

**VII-A3.** $a_{ij}$-аар $i$-р мөр, $j$-р баганад бичигдсэн тоог тэмдэглэе. Эсрэгээс нь үзье, тэгвэл хөрш хоёр нүдэнд бичигдсэн тоонуудын ялгавар 5-аас хэтрэхгүй өөрөөр хэлбэл $|a_{ij}-a_{ij+1}| \leq 5$ гэх мэт байна.

$a_{nm} = 1; a_{k\ell} = 81$ гэвэл $80 = |a_{mn} - a_{kl}| \leq 5|m-k| + 5|n-\ell| \leq 5 \cdot 8 + 5 \cdot 8 = 80$. Эндээс $|m-k| = |n-\ell| = 8$ буюу 1 ба 81 нь нэг диагоналийн төгсгөлүүд дээр байрлана. $2 = a_{st}$ гэе. $79 = |a_{k\ell} - a_{st}| \leq 5|k-s| + 5|\ell - t| = 80$-аас $|k-s| \bigvee |\ell - t| \leq 7$ гэж заавал гарах тул $79 \leq 7 \cdot 5 + 8 \cdot 5 = 75$ болж зөрчилд хүрнэ.

**VII-B1.** $\overline{xyz} = x+y+z+xy+yz+zx+xyz$ тэнцлийг $100x + 10y + z = x+y+z+xy+yz+zx+xyz$ буюу $99x + 9y - xy = yz + xz + xyz$ хэлбэрт бичье. Эндээс

$$z = \frac{99x + 9y - xy}{y + x + xy} (*)$$

болох ба $z \leq 9$ гэдгээс $99x + 9y - xy \leq 9y + 9x + 9xy$ өөрөөр хэлбэл, $90x \leq 10xy$ буюу $y \geq 9$ болно. Иймд $y = 9$ бол $(*)$-оос

$$z = \frac{99x + 9 \cdot 9 - 9x}{9 + x + 9x} = \frac{90x + 81}{10x + 9} = 9$$

гэж гарна.
$y = z = 9$ үед $x + y + z + xy + yz + zx + xyz = x + 9 + 9 + 9x + 81 = x + 9 + 9 + 9x + 81 + 9x + 81 = 100x + 99 = \overline{x99}$ болох бөгөөд манай бодлогын хариу, 199, 299, 399, 499, 599, 699, 799, 899 ба 999 гэж гарна.

**VII-B2.** $n$-ангийн нийт сурагчдын тоо, $k$-дугуйланд явдаггүй сурагчдын тоо $(k \geq 1)$ байг.
Бодлогын нөхцөлөөр $95,5 \leq \dfrac{n-k}{n} \cdot 100 \leq 96,5$ буюу

$$\frac{191}{2} \leq \frac{n-k}{n} \cdot 100 \leq \frac{193}{2}$$

Эндээс $191n \leq 200n - 200k \leq 193n$ буюу $200k \leq 9n \leq 2n + 200k$ болно. Эндээс $n$-ийг олбол $22k + \dfrac{2k}{9} \leq n \leq 28k + \dfrac{4k}{7}$ гэж гарна. $k = 1$ үед $22 < n < 29$ гэж гарах ба $n$-ийн хамгийн бага утга $n = 23$ болно.

**VII-B3.** Яг гурван цифр нь ижил 3 оронтой тоо $\overline{aaa}$ хэлбэртэй $(1 \leq b \leq 9)$ тул 9 ширхэг байна.

Яг гурван цифр нь ижил 4 оронтой тоо

1) $\overline{baaa}$, Энд $b \neq 0, 1 \leq a \leq 9, a \neq b$ хэлбэртэй бол үржих зарчимаар $9 \cdot 9 = 81$ ширхэг байна.

2) $\overline{abaa}, \overline{aaba}, \overline{aaab}$ $(a \neq 0; a \neq b)$ тоо тус бүр үржих зарчимаар $9 \cdot 9 = 81$ тул нийт бодлогын нөхцөлийг хангах тоо $9 + 4 \cdot 9 \cdot 9 = 333$ ширхэг байна.

## ММО-43, VIII ангийн III даваа

Б.Сандагдорж, Ш.Батхишиг

**VIII-A1 (Ч.Гантөмөр).** $n \geq 3$ байх натурал $n$ тооны хувьд $2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1$ тоо нэгээс их гурван бүхэл тооны үржвэрт задарна гэдгийг батал.

**VIII-A2 (Ш.Батхишиг).** $a, b, c, d$- эсрэг бодит тоонууд ба $a + b + c + d = 8$ бол $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1}$ илэрхийлэлийн хамгийн их утгыг ол.

**VIII-A3 (Л.Даваажаргал).** $ABC$ гурвалжинд $AH$ өндөр, $BE$ биссектрис татав. Хэрэв $\angle BEA = 45^\circ$ бол $\angle AHE = 45^\circ$ гэж батал.

**VIII-B1 (Ш.Батхишиг).** $m$ ба $n$ натурал тоонууд ба $mn \mid m^2+n^2+m$ бол $m$ тоо натурал тооны квадрат болохыг батал.

**VIII-B2 (Б.Сандагдорж).** Бүх натурал $k$ тооны хувьд $1 \times k$ тэгш өнцөгтийг тууз гэе. Ямар натурал $n$ хувьд $2007 \times n$ тэгш өнцөгтийг харилцан ялгаатай туузуудаар хучиж чадах вэ?

**VIII-B3 (Б.Сандагдорж).** $ABCD$ трапецийн $AD$ ба $BC$ хажуу талууд дээр $M$ ба $N$ цэгүүдийг $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{CN}{NB}$ байхаар авчээ.$MN$ шулуун $AC$ ба $BD$ диагоналиудтай харгалзан $P$ ба $Q$ цэгээр огтлолцов. Тэгвэл $MP = QN$ гэж батал.

**VIII-A1.** $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$ адилтгал ашиглая.

$$2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1 = \left(2^{2^{n-1}}\right)^4 - \left(2^{2^{n-1}}\right)^2 + 1 =$$

$$= \Big(\left(2^{2^{n-1}}\right)^2 + 2^{2^{n-1}} + 1\Big)\Big(\left(2^{2^{n-1}}\right)^2 - 2^{2^{n-1}} + 1\Big) =$$

$$= \left(2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1\right)\left(2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1\right)$$

$$= \Big(\left(2^{2^{n-2}}\right)^4 + \left(2^{2^{n-2}}\right)^2 + 1\Big)\left(2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1\right) =$$

$$= \Big(\left(2^{2^{n-2}}\right)^2 + 2^{2^{n-2}} + 1\Big)\Big(\left(2^{2^{n-2}}\right)^2 - 2^{2^{n-2}} + 1\Big)\left(2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1\right) =$$
$$= \left(2^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-2}} + 1\right)\left(2^{2^{n-1}} - 2^{2^{n-2}} + 1\right)\left(2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1\right)\ n \geq 3.$$

**VIII-A2.** $A = \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1}$
Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл биш хэрэглэвэл:

$$A^2 = (\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1})^2 \leq$$

$$\leq (1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)(4a + 1 + 4b + 1 + 4c + 1 + 4d + 1) =$$

$$= 4(4(a+b+c+d)+4) = 144$$

$a = b = c = d = 2$ үед $A$ хамгийн их утга нь 12 болно.

**VIII-A3.** $E$ цэгийг дайруулан, $AC$-талд перпендикуляр $EK$ шулуун татъя. $\angle BEA = 45^\circ \Rightarrow BEK = 45^\circ$ болно. Иймээс $\triangle\ AEB =\triangle\ KEB$ ба $\triangle\ AEK$ нь адил хажуут тэгш өнцөгт гурвалжин болно. $\angle KAE = \angle AKE = 45^\circ$. $AK$ хэрчим дээр диаметртэй тойрог дээр $H, E$ цэгүүд орших ба $AKHE$ дөрвөн өнцөг тойрогт багтана. $\angle AHE = \angle AKE = 45^\circ$ болно.

**VIII-B1.** $(m, n) = d$ гэе. $\begin{cases} m = d \cdot m_1 \\ n = d \cdot n_1 \end{cases}$, $(m_1, n_1) = 1,\ \ m_1, n_1 \in \mathbb{N}$
$m \cdot n \mid m^2 + n^2 + m \Rightarrow d^2 \mid m^2 + n^2 + n \Rightarrow d^2 \mid m \Rightarrow m = d^2 \cdot m_2,\ m_2 \in \mathbb{N}$
$(m_2, n_1) = 1, mn \mid m^2 + n^2 + n \Rightarrow m \mid n^2 \Rightarrow m_2 \mid n_1^2 \Rightarrow\ \ m_2 = 1; m = d^2$ болно.

**VIII-B2.** Хоёр тохиолдолд авч үзье.

1-рт: $n \leq 2007$ байг. Тэгвэл $2007 \times n$ тэгш өнцөгтөд хамгийн уртдаа $1 \times 2007$ тууз л орно. Иймээс туузуудын талбайн нийлбэр хамгийн ихдээ $2007 + 2006 + ... + 2 + 1 = \dfrac{20072008}{2} = 2007 \cdot 106^4$ байна. Тэгш өнцөгтийн талбайгаас багагүй $2007 \cdot 1004 \geq 2007 \cdot n$ өөрөөр хэлбэл $n \leq 1004$ үед $2007 \times n$ тэгш өнцөгтийг эхнийх нь 2007 урттай тууз. Хоёрдугаар нь 1 ба 2007 урттай тууз, гуравдугаар нь 2 ба 2005 урттай тууз ... гэх мэт хучина.

2-рт: $n > 2007$ байг. Тэгвэл хамгийн урт тууз нь $1 \times n$ буюу туузуудын талбайн нийлбэр $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ нь $2007 \cdot n$ -ээс багагүй байна. Өөрөөр хэлбэл $\dfrac{n(n+1)}{2} \geq 2007 \cdot n$ гэдгээс $n \geq 4013$ болно. Хучин арга нь өмнөхтэй адилаар эхнийхийг $n$ урттай, туузаар 2 дахийг 1 ба $(n-1)$ урттай туузаар, ... , 2007 дахийг 2006 ба $n - 2006$ урттай туузаар хучина. $n \geq 4013$ үед тэд бүгд ялгаатай.

**VIII-B3.** Трапецийн $CD$ суурь дээр $E$ цэгийг $\dfrac{CE}{ED} = \dfrac{AM}{MD}$ байхаар авъя. Тэгвэл $ME \parallel AC$ ба $NE \parallel BD$ болно. Трапецийн диагоналиудын огтлолцолын цэг ба $NE \cap AC = L$ гэвэл $\dfrac{MP}{PN} = \dfrac{EL}{LN} = \dfrac{DO}{OB} = \dfrac{CD}{AB}$ болох нь хялбар гарна. Үүнтэй адилаар $\dfrac{NQ}{QM} = \dfrac{CD}{AB}$ болно. Эндээс батлагдав.

# ММО-43, VIII ангийн IV даваа

Ч.Гантөмөр

**VIII-A1 (Б.Сандагдорж).** Ялгаатай $m$ ширхэг тэгш, ялгаатай $n$ ширхэг сондгой натурал тоонуудын нийлбэр 2007 байв. $(5m + 7n)$ илэрхийллийн авч болох хамгийн их утгыг ол.

**VIII-A2 (Н.Аргилсан).** Ялгаатай бүхэл тоон талуудтай гурвалжны нэг тал нь 6 ба периметр нь талбайн хэмжээтэй тэнцүү бол энэ гурвалжны талуудыг ол.

**VIII-A3 (Ч.Гантөмөр).** $x^3+y^4 = 2^{23}$ тэгшитгэл натурал тоон шийдтэй юу?

**VIII-B1 (Ч.Гантөмөр).** $\dfrac{1^2}{1\cdot 3} + \dfrac{2^2}{3\cdot 5} + \dfrac{3^2}{5\cdot 7} + \ldots + \dfrac{2007^2}{4013\cdot 4015}$ нийлбэрийг ол.

**VIII-B2 (Н.Аргилсан, Ц.Чинзориг).** $ABMC$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн $AB = BC$ ба $\measuredangle BAM = 30^\circ, \measuredangle ACM = 150^\circ$ бол $AM$ нь $\measuredangle BMC$ өнцөгийн биссектрисс гэж батал.

**VIII-B3 (Б.Эрдэнэбаяр).** $a, b, c$ нь эерэг бодит тоонууд бол $\dfrac{1}{a(1+b)} + \dfrac{1}{b(1+c)} + \dfrac{1}{c(1+a)} \geq \dfrac{3}{1+abc}$ тэнцэл биш биелэхийг батал.

**VIII-A1.** $(5m + 7n)$ илэрхийлэл хамгийн их утгатай байхын тулд $m, n$ аль болох их утгатай байх ёстой. Иймд $m$ ширхэг тэгш $n$ ширхэг сондгой тоонуудаа аль болох бага бөгөөд дэс дараалсан тоонууд байхаар сонгоно.

$2007 = (2+4+\ldots+2m) + (1+3+\ldots+2n-1) = 2\cdot\dfrac{m(m+1)}{2} + n^2$ буюу $m^2+m+n^2 = 2007 \Leftrightarrow (m+\dfrac{1}{2})^2 + n^2 = 2006{,}75$ болно.

Нөгөө талаас $5m+7n = 5(m+\dfrac{1}{2}) + 7n - 2{,}5$ ба $(5(m+\dfrac{1}{2})+7n)^2 \leq (5^2+7^2)((m+\dfrac{1}{2})^2+n^2) = 74\cdot 2006{,}75$ гэдгээс $5m+7n \leq \sqrt{74\cdot 2006{,}75} - 2{,}5$ буюу $m, n \in \mathbb{N}$ учир $5m+7n \leq 382$ гэж гарна. Иймд $5m+7n$ илэрхийлэлийн утга хамгийн ихдээ 382 байна.

$5m+7n = 382, m^2+m+n^2 = 2007$ байхаар $m$ ширхэг сондгой, $n$ ширхэг тэгш тоо олдохгүй хялбархан харуулж болно. Эндээс $5m+7n = 381$ байх тохиолдолыг авч үзнэ. Энэ тохиолдолд ч мөн дээрх чанартай тоонууд олдохгүй. Харин $5m+7n = 380$ байхад нийлбэр нь 2007 байх $m$ ширхэг сондгой, $n$ ширхэг тэгш ялгаатай натурал тоонууд олдоно.

Жишээ нь: $m = 27, n = 35$ ба $(1+3+...+69)+(2+4+...+52+80) = 2007$ болно.

**VIII-A2.** Уг гурвалжны талууд нь $a, b, c$ ба $a = 6, b \leq c$ байг. $p = \frac{1}{2}(a+b+c), S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 2p. \Rightarrow (p-a)(p-b)(p-c) = 4p^2$ буюу $(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) = 32p = 16(a+b+c) \Rightarrow$
$(b+c-6)(36-(c-b)^2) = 16((b+c-6)+12)$ ба $(b+c-6)(20-(c-b)^2) = 16 \cdot 12 = 192, b+c-6 > 0$ учир $20-(c-b)^2 > 1$ эндээс $0 \leq c-b \leq 4$ болно.
(а) Хэрэв $(c-b) \in \{0, 1, 3\}$ байвал $20-(c-b)^2 \in \{20, 19, -11\} \Rightarrow$ 192-ийн хуваагч биш гэж гарна.
(б) Хэрэв $c-b = 2$ бол $b+c-6 = 12 \Rightarrow (a, b, c) = (6, 8, 10)$
(в) Хэрэв $c-b = 4$ бол $b+c-6 = 48 \Rightarrow (a, b, c) = (6, 25, 29)$ болно.

**VIII-A3.** $2^{12} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 2^{23} \equiv 2^{11} \equiv 7 \pmod{13}$ юм. $m \in \mathbb{Z}$ бол $m^3 \equiv 0, 1, 5, 8, 12 \pmod{13}$ ба $m^4 \equiv 0, 1, 3, 9 \pmod{13}$ болохыг шууд шалгаж болно. Эндээс $x, y \in \mathbb{N}$ үед $x^3 + y^4 \equiv 0, 1, 5, 8, 12, 3, 9, 2, 6, 11 \pmod{13}$ байх л боломжтой. Өөрөөр хэлбэл $x^3 + y^4 \not\equiv 7 \pmod{13}$ болно. Эндээс өгөгдсөн тэгшитгэл натурал шийдгүй гэж гарна.

**VIII-B1.** $\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{k}{2k-1} + \frac{k}{2k+1}\right)$ учир

$$S = \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + ... + \frac{2007^2}{4013 \cdot 4015} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2007}\left(\frac{k}{2k-1} + \frac{k}{2k+1}\right)$$

буюу

$$4S = \sum_{k=1}^{2007}\left(\frac{k}{2k-1} + \frac{k}{2k+1}\right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{7} + ... + \frac{2007}{4013} + \frac{2007}{4015}$$

болно. $\frac{k}{2k+1} + \frac{k}{2k+1} = 1$ учир

$$4S = 1 + 2006 + \frac{2007}{4015} = \frac{8058105}{4015} \Rightarrow S = \frac{1611621}{3212}$$

болно.

**VIII-B2.** $B$ цэгийг $AM$-ийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргая. $\measuredangle BAB' = 60°$ ба $ABB'$ нь адил талт гурвалжин. Түүнчлэн $A, B', C$ цэгүүд $B$ цэгт төвтэй нэг тойрог дээр оршино. $\measuredangle ABB'$ нь энэ тойргийн төв өнцөг гэдгээс $\measuredangle ACB' = 30°$ болно. Иймд $\measuredangle ACB' + \measuredangle ACM = 180°$ болж $C$

цэг $MB'$ шулуун дээр оршино гэж гарна. Эндээс $AM$ шулуун $BM$ ба $B'M$ хэрчмүүдийн тэгш хэмийн тэнхлэг өөрөөр хэлбэл $\measuredangle BMB'$-ийн биссектрисс болох нь батлагдав.

**VIII-B3.** Батлах тэнцэтгэл бишийг $(1+abc)$-ээр үржээд хоёр талд нь 3-ийг нэмж өгөе. Тэгвэл батлах тэнцэтгэл бишийн зүүн тал:

$$\frac{1+a+ab+abc}{a(1+b)}+\frac{1+b+bc+abc}{b(1+c)}+\frac{1+c+ac+abc}{c(1+a)}=$$

$$=\frac{(1+a)+ab(1+c)}{a(1+b)}+\frac{(1+b)+bc(1+a)}{b(1+c)}+\frac{(1+c)+ac(1+b)}{c(1+a)}=$$

$$=\frac{(1+a)}{a(1+b)}+\frac{b(1+c)}{(1+b)}+\frac{(1+b)}{b(1+c)}+\frac{c(1+a)}{(1+c)}+\frac{(1+c)}{c(1+a)}+\frac{a(1+b)}{1+a}\geq$$

$$\geq 6\cdot\sqrt[6]{\frac{(1+a)b(1+c)(1+b)c(1+a)(1+c)a(1+b)}{a(1+b)(1+b)b(1+c)(1+c)c(1+a)(1+a)}}=6$$

болж батлах зүйл гарна. Тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл нь:
$\dfrac{(1+a)}{a(1+b)}=\dfrac{a(1+b)}{(1+a)}\Leftrightarrow(1+a)^2=a^2(1+b)^2=a^2b^2(1+c)^2=a^2b^2c^2(1+a)^2$
болно. Эндээс $abc=1$
Нөгөө талаас $\dfrac{1+a}{a(1+b)}=\dfrac{bc(1+a)}{1+b}=\dfrac{bc(1+a)}{b(1+c)}\Rightarrow 1+b=b+bc=b+\dfrac{1}{a}\Rightarrow$
$a=b=c=1$ гэж гарна.

## ММО-43, IX ангийн III даваа

Б.Сандагдорж , Э.Азжаргал

**IX-A1 ().** $a^3+6ab+1$ ба $b^3+6ab+1$ тоонууд нэгэн зэрэг бүхэл тооны куб болох бүх $a, b$ эерэг бүхэл тоог ол.

**IX-A2 (Ч.Гантөмөр).** $xyz = 1$ байх эерэг бодит $x, y, z$ тоонуудын хувьд

$$\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1} \leq \frac{1}{2}$$

тэнцэтгэл биелнэ гэж батал.

**IX-A3 (Б.Сандагдорж ).** $ABC$ гурвалжин өгчээ. $C$ оройн дотоод ба гадаад өнцгийн биссектрис $AB$ шулууныг харгалзан $L$ ба $M$ цэгүүдээр огтлов. Хэрэв $CL = CM$ бол $(AC)^2 + (BC)^2 = 4R^2$ болохыг батал.

Энд $R$ нь $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойргийн радиус.

**IX-B1 (Ч.Гантөмөр).** $(x, y, z, t)$ бүхэл тоон дөрөвтөөс (1). $(z, t, x, y)$ (2). $(y, x, t, z)$ (3). $(x+nz, y+nt, z, t)$ (4). $(x+ny, y, z+nt, t)$ бүхэл тоон дөрөвтүүдийн аль нэгийг гарган авч болно. Энэ үйлдлийг хэдэн удаа хийсний дараагаар $(3, 4, 5, 7)$ дөрөвтөөс $(1, 2, 3, 4)$ дөрөвтийг гарган авч болох уу? (Энд $n$ дурын бүхэл тоо.)

**IX-B2 (Ч.Гантөмөр).** $A = \{1; 3; 5; ...; 2n-1\}$ олонлогийг 12 дэд олонлогт, дэд олонлог бүрийн элементүүдийн нийлбэрүүд тэнцүү байхаар хувааж болох $n$-ийн бүх эерэг бүхэл утгуудыг ол. (Энд дээрх 12 дэд олонлогуудын нэгдэл нь $A$ ба аль ч хоёр дэд олонлогийн огтлолцол нь хоосон байна.)

**IX-B3 (Б.Сандагдорж ).** $AE$ ба $CD$ нь $ABC$ гурвалжны биссектрисүүд байг. Хэрэв $\measuredangle BDE : \measuredangle EDC = \measuredangle BED : \measuredangle DEA$ бол $ABC$ гурвалжныг адил хажуут гэж батал.

**IX-A1.** $a \leq b$ гэж үзье. $b^3 < b^3+6ab+1 < (b+2)^3$ болохыг хялбар шалгаж болно. Иймээс $b^3+6ab+1 = (b+1)^3$ болох ба $2a = b+1$ болно. $a^3+6ab+1 = a^3+12a^2-6a+1 < (a+4)^3$ болно. Эндээс $a^3+6ab+1$ тоо $(a+1)^3, (a+2)^3, (a+3)^3$-тоонуудтай тэнцэх боломжтой. $a^3 = 1, b = 1$ болох ба өөр $a, b$ эерэг бүхэл тоо олдохгүй.

**IX-A2.** $\dfrac{1}{(x+1)^2+y^2+1} = \dfrac{1}{x^2+y^2+2x+2} \leq \dfrac{1}{2xy+2x+2}$ ба $x = \dfrac{a}{b}, y = \dfrac{b}{c}, z = \dfrac{c}{a}$ орлуулга хийвэл $\dfrac{1}{2(xy+x+1)} = \dfrac{bc}{2(ab+bc+ca)}$ болно.

Бусад нэмэгдэхүүнүүдийн хувьд адил хувиргалт хийж хэлбэл батлах тэнцэтгэл биш гарна. Тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл нь $a = b = c = 1$ болно.

**IX-A3.** Гурвалжны дотоод ба гадаад өнцгийн биссектрисүүд перпендикуляр байна. $\frac{\gamma}{2} + (\frac{180-\gamma}{2}) = 90^\circ.|CL| = |CM|$ тул $\triangle\ CLM-$ адил хажуут тэгш өнцөгт. Иймээс $\angle CLM = \angle LMC = 45^\circ$. Мөн $\triangle\ ALC, \triangle\ CLB$ хувьд

$$\begin{cases} \alpha + \frac{\gamma}{2} = 45^\circ \\ \beta + \frac{\gamma}{2} = 135^\circ \end{cases} \qquad (*)$$

байна. $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойрог дээр $\angle ACD = 90^\circ$ байхаар $D$ цэгийг авъя. Тэгвэл $AD = 2R$ диаметр болно. Одоо $BC = CD$ гэдгийг харуулъя. $ABCD$ багтсан 4 өнцөгтийн хувьд $\angle ADC = 180^\circ - \beta\ \angle DAC = 90^\circ - \angle ADC = \beta - 90^\circ$. Тэгвэл $(*)$-оос $\beta - 90^\circ = 45^\circ - \frac{\gamma}{2} = \alpha$ болох ба $BC = CD$ байна.

**IX-B1.** Ямар ч үйлдлийн хувьд захын тоонууд болон дундах тоонуудын үржвэрүүдийн ялгаварын абсалют хэмжигдэхүүн инвариант болохыг хялбархан шалгаж болно. $(3, 4, 5, 7)$ хувьд $21 - 20 = 1$ ба $(1, 2, 3, 4)$ хувьд $4 - 6 = -2$ гарч байгаа учраас $(3, 4, 5, 7)$ дөрөвтөөс $(1, 2, 3, 4)$ дөрөвтийг гарган авч чадахгүй.

**IX-B2.** $1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1 = n^2$ ба $\frac{n^2}{12} \in \mathbb{N}$ байна гэе. Энэ нь дэд олонлогийн элементүүдийн нийлбэр болно. $n = 6k, k \in \mathbb{N}$ ба дэд олонлогийн элементүүдийн нийлбэр $3k^2$ байх ёстой. $2n - 1 = 12k - 1 \leq 3k^2 \Leftrightarrow 3(k-2)^2 \geq 11 \Rightarrow k \geq 4, k \neq 5$ гэж харуулъя.
$k = 5$ үед $A = \{1, 3, 5, ..., 59\}, |A| = 30$ ба дэд олонлог бүрийн элементүүдийн нийлбэр 75 гарна. Дэд бүр дор хаяж 1 элементтэй ба элементүүдийн нийлбэр нь сондгой тоо гэдгээс дэд бүр дор хаяж 3 элемент агуулна. Энэ нь $|A| = 30$ гэдэгт зөрчинө.
$k = 4, 6, 7, 9$ үед байгуулалт хийе.
$k = 4$ үед $A = \{1, 3, ..., 47\}$ ба $B_i = \{2i - 1, 49 - 2i\}, \quad i = 1, 2, ..., 12$
$k = 6$ үед $A = \{1, 3, ..., 79\}$ , $B_i = \{35 + 2i, 73 - 2i\}, \quad i = 1, 2, ..., 9$ ба
$B_{10} = \{23, 25, 29, 31\}$, $B_{11} = \{19, 21, 23, 35\}$, $B_{11} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 27\}$ нийлбэр 108
$k = 7$ үед $A = \{1, 3, ..., 83\}$ , $B_i = \{4i - 3, 65 - 2i, 85 - 2i\}, i = 1, 2, ..., 10$
$B_{11} = \{8, 27, 35, 39, 43\}, B_{12} = \{4, 11, 15, 19, 23, 31, 41\}$ нийлбэр 147.
$k = 9$ үед $A = \{1, 3, 5, ..., 107\}$ , $B_i = \{23 + 8i, 109 - 4i, 111 - 4i\}$,
$i = 1, 2, 3, ..., 7$ $B_8 = \{1, 11, 65, 67, 69\}, B_9 = \{3, 15, 73, 75, 77\}$,
$B_{10} = \{29, 37, 57, 59, 61\}, B_{11} = \{5, 9, 17, 23, 25, 33, 51, 53\}$,

$B_{12} = \{7, 11, 13, 19, 21, 35, 43, 45, 49\}$ нийлбэр 243.
Одоо $k = k_0$ үед хуваалт олдох бол $k = k_0 + 4$ үед хуваалт олдоно. $B_i, i = 1, 2, ..., 12$ нь $A = \{1, 3, 5, ..., 12k_0 - 1\}$-ийн хуваалт байг. $A' = \{1, 3, 5, ..., 12k_0 + 4 - 1\}$ бол $B'_i = B_i + \{12k_0 - 1 + 2i, 12k_0 + 49 - 2i\}, i = 1, 2, ..., 12$ нь $A'$-ийн бодлогын нөхцөл хангах хуваалт юм.
Эндээс $k \in \{4+4m, 6+4m, 7+4m, 9+4m\}$ ба $k \neq 1, 2, 3, 5$ байхад хуваалт олдоно гэж гарна.

**IX-B3.** $\dfrac{\measuredangle BDE}{\measuredangle EDC} = \dfrac{\measuredangle BED}{\measuredangle DEA} = \lambda$ байг. $\measuredangle CDE = x, \measuredangle AED = y$ гэвэл $\measuredangle BDE = \lambda x, \measuredangle BED = \lambda y$ байна.
Нөгөө талаас $\lambda x + \lambda y + \measuredangle ABC = 2\alpha + 2\beta + \measuredangle ABC = 180°$ буюу $\lambda(x+y) = 2(\alpha + \beta)$ байна.
$\measuredangle DOE = 180° - x - y = 180° - (x+y) = 180° - (\alpha + \beta)$ тул $x + y = \alpha + \beta$ болж гарах ба $\lambda = 2$ болно. Одоо $O$ цэгийн $DE$ хэрчмийн хувьд тэгш хэмтэй цэгийг $O_1$ гэвэл $\triangle\ DOE = \triangle\ DO_1E$ болно.
Нөгөө талаас $DO_1, EO_1$ нь $DBE$ гурвалжны биссектрисүүд болоход хүрнэ. Иймээс $BO_1$ биссектрис байна. $BO$ мөн биссектрис учир $B, O_1, O$ цэгүүд нэг шулуун дээр оршино. $OO_1 \perp DE$ учир $BO_1$ биссектрис $BO_1 \perp DE$ гэдгээс $\measuredangle BDE = \measuredangle BED$ болно. Өөрөөр хэлбэл $\triangle\ DBE$ адил хажуут. ӨТӨ шинжээр $\triangle\ BDC = \triangle\ BEA$ учир $AB = BC$ болж батлагдана.

## ММО-43, IX ангийн IV даваа

Ш. Батхишиг (МУБИС)

**IX-A1** Ялгаатай натурал тоонуудаас тогтох $A$ олонлогийн аливаа хоёр элементийн нийлбэр нь ялгавартаа бүхлээр хуваагдана. Дурын натурал $n$ тооны хувьд $n$ ширхэг элементтэй дээрх чанарыг хангах $A$ олонлог олдох уу?

**IX-A2 (Н.Аргилсан).** $A$ өнцөг нь хурц байх $ABC$ гурвалжны $B$ ба $C$ оройгоос эсрэг талуудад буулгасан өндрийн суурь нь харгалзан $D$ ба $E$ байг. $AB$ талаар диаметрээ хийсэн тойрог $EC$ өндрийг $M$ цэгээр, $AC$ талаар диаметрээ хийсэн тойрог $BD$ өндрийг $N$ цэгээр огтолсон бөгөөд $M$ ба $N$ нь гурвалжны дотор орших бол $AM = AN$ гэж батал.

**IX-A3 (Б.Хоролдагва).** $x, y, z$ нь $x + y + z = 1$ байх эерэг бодит тоонууд бол

$$(xy + yz + zx)\left(\frac{x}{y^2 + y} + \frac{y}{z^2 + z} + \frac{z}{x^2 + x}\right) \geq \frac{3}{4}$$

болохыг батал.

**IX-B1 (А.Ганбат).** $n \mid xy + 1$ байх дурын натурал $x$ ба $y$ тоонуудын хувьд $n \mid x + y$ биелдэг байх бүх натурал $n$ $(2 \leq n)$ тоог ол.

**IX-B2 (Э.Азжаргал, Д.Мөнхбаатар).** $ABC$ $(AB \neq BC)$ гурвалжны $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ биссектрисүүд ба $C_1A_1 \cap CA = M$ бол $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойргийн $B$ цэгт татсан шүргэгч шулуун $B_1M$ хэрчмийг хагаслан хуваахыг батал.

**IX-B3 (Б.Батбаясгалан).** Бүжгийн шилдэг хос шалгаруулах тэмцээнд ангийн сурагчид хос бүрдүүлж оролцов. Эрэгтэй эмэгтэй хоёр сурагч нэг хос болох бөгөөд нэг сурагч хэдэн ч хосод орж болно. Хэрэв хос бүр нэг бүжиг бүжиглэх ёстой ба сурагч бүр тэгш тооны бүжиг бүжиглэхээр байсан бол хэсэг хугацааны дараа сурагч бүр өөрийн бүжиглэх ёстой бүжгүүдийн яг хагасыг нь бүжиглэсэн байхаар хувиарь зохиож болохыг батал.

**IX-A1.** Олдоно.

Уг олонлогийг индукцээр байгуулъя. $n = 3$ үед $A = \{1, 2, 3\}$ олонлог бодлогын нөхцлийг хангана. $n = k$ үед бодлогын нөхцлийг хангадаг $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ олонлог олддог гэе. Тэгвэл $a_i - a_j \mid a_i + a_j$ ба $a_i - a_j \mid a_i - a_j$ гэдгээс $a_i - a_j \mid 2a_i$ ба $a_i - a_j \mid 2a_j$ гэж мөрдөнө. $p = a_1a_2 \cdots a_k$ гэвэл $A = \{p, p + a_1, p + a_2, \ldots, p + a_k\}$ олонлог бодлогын нөхцлийг хангахыг хялбар шалгаж болно.

**IX-A2.** $BM$ ба $NC$ хэрчим татъя. $\triangle ACE \sim \triangle ABD$ болох нь илэрхий. Иймд $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ (1) байна. Мөн $\measuredangle AMB = \measuredangle AEM = 90^\circ$ ба $\measuredangle EAM$ ерөнхий учир $\triangle BMA \sim \triangle MEA$ болох ба $\frac{AM}{AE} = \frac{AB}{AM}$, $AM^2 = AE \cdot AB$ (2) болно.

$\measuredangle ANC = \measuredangle ADN = 90^\circ$ ба $\measuredangle NAD$ ерөнхий учир $\triangle CNA \sim \triangle NDA$ болох ба $\frac{AN}{AD} = \frac{AC}{AN}$, $AN^2 = AC{\cdot}AD$ (3) болно. (2) -ыг (3) -д харьцуулбал $\frac{AM^2}{AN^2} = \frac{AE{\cdot}AB}{AC{\cdot}AD}$ болох ба (1) -ийг ашиглавал $\frac{AM^2}{AN^2} = 1$ болно. Эндээс $AM = AN$ болно.

**IX-A3.** Өгсөн тэнцэтгэл бишийг батлахын өмнө харгалзан *Коши-Буняковский* болон *Кошийн* тэнцэтгэл биш ашиглан гарах дараах хоёр хялбар тэнцэтгэл бишийг авч үзье.

$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ -нь эерэг бодит тоонууд бол

$$\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\alpha+\beta+\gamma} \tag{1}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 \tag{2}$$

тэнцэтгэл бишүүд биелнэ. $\dfrac{x}{y^2+y} + \dfrac{y}{z^2+z} + \dfrac{z}{x^2+x} = \dfrac{x^2}{y^2} \cdot \dfrac{y}{x(y+1)} + \dfrac{y^2}{z^2} \cdot \dfrac{z}{y(z+1)} + \dfrac{z^2}{x^2} \cdot \dfrac{x}{z(x+1)} =$

$$= \left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot \frac{1}{x + \frac{x}{y}} + \left(\frac{y}{z}\right)^2 \cdot \frac{1}{y + \dfrac{y}{z}} + \left(\frac{z}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{z + \dfrac{z}{x}}$$

гэж бичээд (1) тэнцэтгэл бишийг хэрэглэвэл

$$\frac{x}{y^2+y} + \frac{y}{z^2+z} + \frac{z}{x^2+x} \geq \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}}$$

болно. (2) тэнцэтгэл бишийг ашиглавал

$$\frac{1 + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}}{\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}} = \frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}} + 1 \leq \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

болно. Иймд

$$\frac{x}{y^2+y} + \frac{y}{z^2+z} + \frac{z}{x^2+x} \geq \frac{3}{4}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{yz} + \frac{z^2}{zx}\right)$$

болох бөгөөд дахин (1) тэнцэтгэл бишийг хэрэглэвэл бидний батлах тэнцэтгэл биш гарна.

Баталгааны хэрэглэсэн тэнцэтгэл бишүүдээс харвал дээрх тэнцэтгэл биш $x = y = z$ үед тэнцэлдээ хүрнэ.

**IX-B1** Эхлээд хоёр тооны үржвэр тогтмол үед хоёр тоо холдоход нийлбэр ихэснэ гэдгийг тэмдэглэе. $24 < n$ байг.

Хэрэв $n - 1 = xy$, $1 < x \leq y < n - 1$, $x, y \in \mathbb{Z}$ бол $1 < x + y \leq 2 + \frac{n-1}{2} < n$ болох ба эндээс $n \nmid x + y$. Иймд $n - 1$ анхны тоо.

Хэрэв $2n - 1 = xy$, $1 < x \leq y < n - 1$, $x, y \in \mathbb{Z}$ бол $x \neq 2$ болно. Эндээс $1 < x + y \leq 3 + \frac{2n-1}{3} < n$ болох ба $n \nmid x + y$. Иймд $2n - 1$ анхны тоо.

$3n - 1 = xy$, $1 < x \leq y < n - 1$, $x, y \in \mathbb{Z}$ байг. Хэрэв $x = 2$ бол $n - 1$ анхны тоо байж чадахгүй. Иймд $x \neq 2$ байна. Мөн $n - 1, 2n - 1$ анхны тоонууд гэдгээс $3 \mid n$ байна. $x \neq 3$ тул $1 < x + y \leq 4 + \frac{3n-1}{4} < n$ болох ба $n \nmid x + y$. Иймд $3n - 1$ анхны тоо.

$4n - 1 = xy$, $1 < x \leq y < n - 1$, $x, y \in \mathbb{Z}$ байг. $x \neq 2, 4$ байна. $3 \mid n$ байх тул $x \neq 3$ байна. Эндээс $1 < x + y \leq 5 + \frac{4n-1}{5} < n$ болох ба $n \nmid x + y$. Иймд $4n - 1$ анхны тоо.

$24 \leq n - 1, 2n - 1, 3n - 1, 4n - 1$ анхны тоонууд бол $5 \mid n$.

$p \equiv 2 \pmod 5$ ба ХИЕХ$(p, n) = 1$ байх анхны тоо $p$ -г сонгож авъя. Тэгвэл $p \cdot 1 + 1, p \cdot 2 + 1, \ldots, p \cdot n + 1$ тоонууд дотор $n$ -д хуваагдах тоо бий. Уг тоог $p \cdot k + 1$ гэе. Тэгвэл $n \mid p \cdot k + 1$ тул $5 \mid p \cdot k + 1$ гэдгээс $k \equiv 2 \pmod 5$ байна. Эндээс $5 \nmid p + k$ тул $n \nmid p + k$. Иймд $24 < n$ үед бодлогын нөхцлийг хангах $n$ тоо олдохгүй.

$n \leq 24$ үед $n - 1$ анхны тоо байх ёстой бөгөөд үүнийг тооцож шалгавал $n = 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ гэж гарна.

**IX-B2.** Эхлээд $AA_1$, $BB_1$ ба $CC_1$ -ууд нь $ABC$ гурвалжины биссектрисүүд ба $A_1C_1 \cap AC = M$ цэгт огтлолцох бол $BM$ шулуун $B$ оройн гадаад өнцгийн биссектрисс болохыг харуулъя. $ABC$ гурвалжин ба $A_1C_1$ огтлогчийн хувьд Менелейн теорем бичвэл $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$ болно. Биссектрисийн чанар ёсоор $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{CB}$, $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA}{AC}$ байна. Иймээс $\frac{CM}{MA} = \frac{A_1C}{BA_1} \cdot \frac{C_1B}{AC_1} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{CB}{AC} = \frac{CB}{AB}$ болно. Нөгөө талаас $C$ цэгийг дайрах $AB$ -тэй параллель шулуун $BM$ шулууныг $K$ цэгээр огтлох бол $\triangle AMB \sim \triangle CMK$ гэдгээс $\frac{CM}{MA} = \frac{CK}{AB} \Rightarrow CK = AB \cdot \frac{CM}{MA} = AB \cdot \frac{CB}{AB} = CB$ байна. Эндээс $\measuredangle CBK = \measuredangle CKB$ болох ба $AB$ шулуун $CK$ шулуунууд параллель тул $BM$ нь $B$ оройн гадаад өнцгийн биссектрис болно.

Одоо үндсэн бодлогоо авч үзье. $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойргийн $B$ цэгт татсан шүргэгч шулуун $B_1M$ хэрчмийг $N$ цэгт огтолно гэж үзье. $BM$ нь $B$ оройн гадаад өнцгийн биссектрис гэдгээс $\measuredangle B_1BM = 90°$

болно. Улмаар $\measuredangle CBN = \frac{\breve{BC}}{2} = \measuredangle BAC$ ба $\measuredangle NBB_1 = \measuredangle CAB + \frac{\measuredangle ABB_1}{2} = \measuredangle BB_1N$ болно. Иймд $BN = B_1N$ болно. Мөн $BN = NM$ болохыг хялбар харуулж болно.

**IX-B3.** Ангийн сурагчдыг графийн орой гээд бүжиглэх хосуудыг уг графийн ирмэгүүд гэе. Ангийн эрэгтэй сурагчдын олонлогийг $A$, эмэгтэй сурагчдын олонлогийг $B$ гэвэл граф маань $A$, $B$ туйлуудтай 2 туйлт граф болох ба хүн бүр тэгш тооны бүжиг бүжиглэх ёстой тул оройн зэргүүд бүгд тэгш байна. Орой бүрийн зэрэг нь тэгш байдаг холбоост граф Эйлерийн циклтэй тул манай графийн холбоост компонент бүрт бүх ирмэгийг нь агуулсан цикл олдоно. Эдгээр циклүүдийн ирмэгүүдийг улаан, хөх өнгүүдээр сөөлжлүүлэн будаж болно. Учир нь 2 туйлт графийн цикл бүр нь тэгш тооны ирмэг агуулдаг. Ингэж будахад орой бүрээс гарсан улаан ба хөх ирмэгийн тоо тэнцүү байх нь ойлгомжтой. Одоо улаанаар будагдсан ирмэгт харгалзах хосуудыг эхний ээлжинд бүжиглүүлэхэд бидний хүссэн хуваарь болж чадна.

## ММО-43, X АНГИЙН III ДАВАА

Т. Хулан

**X-A1** Дурын $1 \leq m \leq n$ натурал тоонуудын хувьд:

$$m \,\Big|\, \left(C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^{m-1} C_n^{m-1}\right) \cdot n$$

болохыг батал.

**X-A2** Хэсэг хүн цугларахад бусдыгаа бүгдийг таньдаг хүн ба бусдыгаа бүгдийг нь таньдаггүй хүн олддоггүй бол "холимог цугларалт" гэе. Тэгвэл 5-аас олон хүнтэй холимог цугларалтаас холимог цугларалт үүсгэх 4 хүн сонгож болохыг батал. Танилууд нь бие биенээ таньдаг гэж үз.

**X-A3** $\triangle ABC$-ийн $\angle B$-ийн биссектрисс $AC$ талыг $P$ цэгт, $\angle C$-ийн биссектрисс $AB$ талыг $Q$ цэгт огтлоно. $BP$ ба $CQ$-ийн огтлолцол $I$ ба $IQ = IP$, $AB \neq AC$ бол $\angle OIB$-г ол. $O$ нь $\triangle ABC$-г багтаасан тойргийн төв.

**X-B1** Нэгэн хот $n$, $(n > 4)$ ширхэг метроны шугамтай бөгөөд нэг буудал дээр хамгийн ихдээ 3 метроны шугам огтлолцоно. Хэрэв метроны аль ч 2 шугамыг холбосон гурав дахь шугам олддог бол уг хотод дор хаяж $\frac{5}{6}(n-5)$ ширхэг метроны буудал бий гэдгийг батал.

**X-B2** Дартсын тэмцээнд 10 тамирчин оролцов. Тамирчид өөрсдийн дугаартай ижил дугаартай сумыг шидэх ба бүгд эхний шидэлтээ хийсний дараа 1 дугаартай тамирчин өөрийн сумыг байнаас авч 2, 3, 4 дугаартай сумаар үүсэх гурвалжны хүндийн төв рүү шидэж онов. Энэ мэтчилэн тамирчин бүр өөрийн ээлжинд сумаа байнаас авч өөрийнхөө дараа шидэх 3 тамирчины дугаартай ижил дугаартай сумнуудаар үүсэх гурвалжны хүндийн төв рүү шидэж оножбайв. Хэзээ нэгэн цагт бүх сум 1 радиустай дугуй дотор орно гэж батал. Тамирчид өөрсдийн дугаарын дагуу тойргоор сумаа шиднэ.

**X-B3** Хавтгайд нэгж талтай $ABCD$ квадрат ба $P$ цэг өгөгдөв.

$$3AP + 5CP + \sqrt{5}(BP + DP) \geq 6\sqrt{2}$$

болохыг батал.

**X-A1.** $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$-ийг ашиглан

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^{m-1} C_n^{m-1} = (-1)^{m-1} C_{n-1}^{m-1}$$

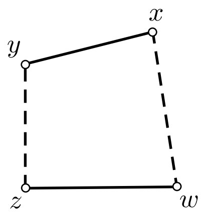
болохыг хялбархан батлаж болох тул $m \,\big|\, n \cdot C_{n-1}^{m-1}$ гэж харуулахад хангалттай. Нөгөө талаас

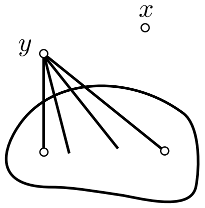
$$n \cdot C_{n-1}^{m-1} = \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} = m \cdot \frac{n!}{m!(n-m)!} = m \cdot C_n^m$$

тул батлах зүйл батлагдав.

**X-A2.** Хамгийн цөөн хүн таньдаг хүн дор хаяж нэг хүн таньдаг байна. Хамгийн цөөн хүнийг таньдаг хүнийг $x$ гэе.

а) $x$ нь яг нэг хүн таньдаг ба түүнийг нь $y$ гэе. $y$ нь бүх хүнийг таних боломжгүй тул түүний таньдаггүй $z$ хүн олдоно. $z$ нь бүх хүнийг таньдаггүй байх боломжгүй тул түүний таньдаг $w$ хүн олдоно. $x$ нь нэг хүн л таньдаг тул $w$ байж чадахгүй иймд $x$, $y$, $z$, $w$ хүмүүс холимог цугларалт үүсгэнэ. (1 дэх зураг).



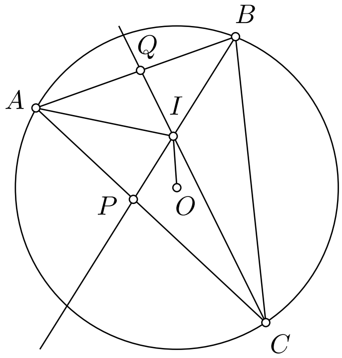


б) $x$ нь дор хаяж 2 хүн таньдаг гэе. Тэгвэл хүн бүр дор хаяж 2 хүн танина. $x$-ийг хасахад үлдэх хүмүүс нь холимог цугларалт үүсгэдэг бол индукцээр холимог цугаларалт үүсгэх 4 хүн олдоно. Иймд үлдэх хүмүүс нь холимог цугларалт үүсгэдэггүй гэе. Хэрэв үлдэх хүмүүс дунд бусдыгаа бүгдийг нь таньдаггүй хүн олдвол түүний нийт танилын тоо 1-ээс хэтрэхгүй. ($x$-ийг л таних боломжтой). Энэ нь хүн бүр доржхаяж 2 танилтай гэдэгт зөрчинө. Иймд үлдэх хүмүүс дунд бусдыгаа бүгдийг нь таньдаг $y$ хүн олдоно (2 дахь зураг). Одоо $y$-ийг хасахад үлдэх хүмүүс нь холимог цугларалт үүсгэнэ гэж батлая. Хүн бүр анх 2-оос цөөнгүй хүн таньдаг байсан тул нэг хүн хасагдахад танилын тоо дор хаяж 1 байна. Иймд үлдэх бүх хүнийг таньдаггүй хүн олдохгүй. Нөгөө талаас $x$-ээс ялгаатай ямар нэг хүн бусдыгаа таньдаг гэвэл тэр нь $y$-тэй ч мөн адил танил тул анх холимог цугларалт үүсгээгүй болоход хүрнэ. Хэрэв $x$ нь $y$-ээс бусад бүх хүнийг таньдаг гэвэл бүх хүн нэгээс бусад бүх хүнийг таньдаг болно. Энэ тохиолдолд холимог цугларалт үүсгэх 4 хүн олдох нь ойлгомжтой.

**X-A3.** $\triangle AQI$ ба $\triangle API$-ийн хувьд синусын теорем бичвэл

$$\frac{\sin(\measuredangle IPA)}{AI} = \frac{\sin(\measuredangle IAP)}{IP} = \frac{\sin(\measuredangle IAQ)}{IQ} = \frac{\sin(\measuredangle AQI)}{AI}$$

учир $\sin\measuredangle IPA = \sin\measuredangle AQI$, $AB \neq AC$ тул $\measuredangle B \neq \measuredangle C$ учир $\measuredangle IPA \neq \measuredangle AQI$ иймд $\measuredangle IPA = \pi - \measuredangle AQI$, $\measuredangle IPA = \beta/2 + \gamma$, $\measuredangle AQI = \beta + \gamma/2$-г тооцвол $\beta/2 + \gamma = \pi - \beta - \gamma/2$ буюу $\frac{3}{2}(\beta + \gamma) = \pi \Rightarrow \beta + \gamma = 120°$ тул $\measuredangle A = 60°$. $\measuredangle BOC = 120°$, $\measuredangle CIB = \pi - \beta/2 - \gamma/2 = 180° - 60° = 120°$. Иймд $IBCO$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. $\measuredangle OIB = 120° + \measuredangle OIC = 120° + \measuredangle OBC = 120° + \frac{180° - 120°}{2} = 150°$.



**X-B1.** Метроны шугамууд тус бүр $l_1, \ldots, l_n$ ширхэг буудалтай ба нийт буудлын тоог $l$ гэе. Шугам ба түүний буудал гэсэн хосын тоо нь нэг талаас $l_1 + \cdots + l_n$ болох ба нөгөө талаас $3l$-ээс хэтрэхгүй. Иймд

$$\frac{l_1 + \cdots + l_n}{3} \leq l$$

байна. Шугам бүр дор хаяж 3 буудалтай гэвэл $n \leq l$ болно. Иймд 1-р шугам нь 2 буудалтай гэе (шугам бүр нь дор хаяж 2 буудалтай гэдгийг харуулахад төвөггүй). Тэгвэл энэ шугамтай өөр дөрвөн л буудал огтлолцох боломжтой (буудал бүрт нь 2-оос хэтрэхгүй). Бусад шугамуудаас 1-р шугам руу дамжихийн тулд дээрх 4 шугамтай огтлолцдог байх ёстой. Нэг буудал дээр 3-аас олон шугам огтлолцох боломжгүй тул үлдэх $n - 5$ буудал нь дээрх 4 шугамтай дор хаяж $\frac{n-5}{2}$ ширхэг буудлаар огтлолцоно. Өөрөөр хэлбэл дээрх 4 шугамд дор хаяж $\frac{n-5}{2}$ буудал бий. Үлдэх $n - 5$ буудал нь тус бүрдээ ядаж хоёр буудалтай тул

$$\frac{n-5}{2} + 2(n-5) + 2 \leq l_1 + \cdots + l_n$$

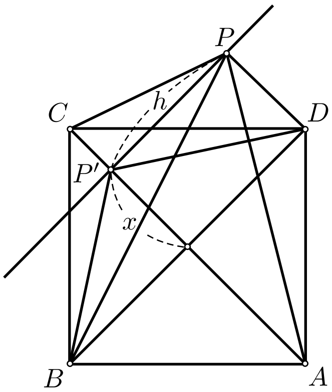
болно. Иймд $\frac{5}{6}(n - 5) < l$ болов.

**X-B2.** XI ангийн B2 бодлогыг үз.

**X-B3.** $P$ цэгийн $AC$ шулуун дээр проекцийг $P'$ ба $PP' = h$, квадратын төвөөс $P'$ хүртэлх зайг $x$ гэе. Эхлээд

$$3AP + 5CP + \sqrt{5}(BP + DP) \geq 3AP' + 5CP' + \sqrt{5}(BP' + DP')$$

болохыг батлая. $AP \geq AP'$, $CP \geq CP'$ байх нь илэрхий.



$BP + DP \geq BP' + DP'$ гэж харуулъя.

$$BP + DP = f(h) = \sqrt{x^2 + \big(\frac{\sqrt{2}}{2} + h\big)^2} + \sqrt{x^2 + \big(\frac{\sqrt{2}}{2} - h\big)^2}$$

гэвэл $f'(h) = 0 \Rightarrow h = 0$ тул $\min f = f(0) = 2\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}} = BP' + DP'$ болно.

Иймд $AC$ диагональ дээр орших $P$ цэгийн хувьд буюу $P = P'$ үед тэнцэтгэл бишийг батлахад хангалттай.

$g(x) = 3(\frac{\sqrt{2}}{2} + x) + 5(\frac{\sqrt{2}}{2} - x) + 2\sqrt{5}\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}}$ функцийг авч үзье ($P = P'$ үед тэнцэтгэл бишийн зүүн тал ингэж бичигдэнэ).

$$g'(x) = -2 + \frac{2\sqrt{5}x}{\sqrt{x^2 + 0.5}} = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

тул $\min g = g\big(\frac{\sqrt{2}}{4}\big) = 6\sqrt{2}$ болж батлах тэнцэтгэл биш батлагдав.

## ММО-43, X ангийн IV даваа

Д.Батнасан

**X-A1 (Ч.Гантөмөр).** $a, b, c$ нь эерэг бодит тоонууд бол

$$\frac{1}{a+b+c} \cdot (\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}) \geq \frac{1}{ab+ac+bc} + \frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

тэнцэл биш биелэхийг батал.

**X-A2 (Э.Азжаргал, Д.Мөнхбаатар).** $ABC$ гурвалжинд багтсан тойрог $AB$ талыг $D$ цэгт шүргэдэг. $E$ нь $AC$ тал дээр орших цэг бол $ADE, BDE, BCE$ гурвалжнуудад багтсан тойргуудад нэг ерөнхий шүргэгч олдохыг батал.

**X-A3 (У.Батзориг).** $A \subset \{1, 2, ..., 2n\}$ ба $|A| = n$ байг. $A$ олонлогийн аль ч хоёр элемент нь бие биенээ хуваадаггүй ба $m(A)$ нь $A$-ийн хамгийн бага элемент бол $m(A)$-ийн авч болох хамгийн бага утгыг ол.

**X-B1 (У.Батзориг, Э.Азжаргал).** $a, n$ нь $a|2n^2$ байх натурал тоонууд бол $n^2 + a$ нь бүтэн квадрат биш гэж батал.

**X-B2 (Д.Батнасан, У.Батзориг).** Хавтгай дээр $A_1, A_2, A_3 A_4, P$ цэгүүд өгөгджээ. $B_1, B_2, B_3, B_4$ цэгүүд нь харгалзан $PA_1, PA_2, PA_3, PA_4$ хэрчмүүд дээр оршиж байг. $C_{12} = A_1B_2 \cap A_2B_1, C_{13} = A_1B_3 \cap A_3B_1, C_{14} = A_1B_4 \cap A_4B_1, C_{23} = A_2B_3 \cap A_3B_2, C_{24} = A_2B_4 \cap B_2A_4, C_{34} = A_3B_4 \cap B_3A_4$ гэж тус тэмдэглэе. $C_{12}C_{34}, C_{13}C_{24}, C_{14}C_{23}$-ууд нь нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

**X-B3 (Ш.Батхишиг).** Таван асуулттай, асуулт бүр дөрвөн сонголттой байх тестээр 2008 оюутныг шалгажээ. Оюутан бүр асуулт тус бүрийн нэг сонголтыг сонгоно. Тестийг хураах авсны дараа дурын $n$ оюутны дотроос аль ч хоёр оюутан ядаж хоёр асуултанд ялгаатайгаар хариулсан байх дөрвөн оюутныг сонгож болохыг ажиглажээ. Тэгвэл $n$ - ын хамгийн бага утгыг ол.

**X-A1.** (С.Дөлгөөний бодолт)

$$A = \frac{1}{a+b+c} \cdot \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{1}{ab+ac+bc} + \frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

$A \geq \frac{1}{2(ab+ac+bc)} + \frac{1}{2(ab+ac+bc)} + \frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)}$ $\quad (a \geq b \geq c)$ гэж эрэмбэлэе.

$$\alpha_1 = (a+b+c)(a+b) \qquad \beta_1 = 2(ab+ac+bc)$$

$$\alpha_2 = (a+b+c)(a+c) \qquad \beta_2 = 2(ab+ac+bc)$$

$$\alpha_3 = (a+b+c)(b+c) \qquad \beta_3 = 2(a^2+b^2+c^2)$$

гэж сонгоод , $f(x) = \dfrac{1}{x}$ функц хотгор тул Караматын тэнцэтгэл биш ёсоор $f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+f(\alpha_3) \geq f(\beta_1)+f(\beta_2)+f(\beta_3)$ болно. Одоо Караматын нөхцөл биелэх эсэхийг шалгая,биелвэл манай бодлого бодогдоно.

$$\alpha_1 \geq \beta_1 : \quad (a+b+c)(a+b) \geq 2(ab+ac+bc)$$

$$a^2+b^2+2ab+ac+bc \geq 2ab+2ac+2bc$$

$$a^2+b^2 \geq ac+bc \quad a^2 \geq ac$$

$$b^2 \geq bc \quad \blacktriangle$$

$$\alpha_1+\alpha_2 \geq \beta_1+\beta_2 : \quad (a+b+c)(a+b)+(a+b+c)(a+c) \geq 4(ab+ac+bc)$$

$$2a^2+b^2+c^2+3ab+3ac+2bc \geq 4ab+4ac+4bc$$

$$2a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+2bc \quad b^2+c^2 \geq 2bc$$

$$a^2+a^2 \geq ab+ac \quad a^2 \geq ab \quad a^2 \geq ac \quad \blacktriangle$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = \beta_1+\beta_2+\beta_3 :$$

$$(a+b+c)((a+b)+(a+c)+(c+b)) = 4(ab+bc+ca)+2(a^2+b^2+c^2)$$

$$2(a+b+c)^2 = 2(a+b+c)^2 \quad \blacktriangle$$

$$f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+f(\alpha_3) \geq f(\beta_1)+f(\beta_2)+f(\beta_3) :$$

$$\Big(\frac{1}{(a+b+c)(a+b)}+\frac{1}{(a+b+c)(b+c)}+\frac{1}{(a+b+c)(c+a)}\Big) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2(ab+ac+bc)}+\frac{1}{2(ab+ac+bc)}+\frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

$$\frac{1}{a+b+c}\cdot\Big(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\Big) \geq \frac{1}{ab+ac+bc}+\frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл нь $a=b=c$.

**X-A2.** (Энхзаяагийн бодолт:) $\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ нь харгалзан $ABC, AED, DEB, BEC$ гурвалжнуудад багтсан тойргууд байг. $\ell(\omega_1, \omega_2)$ нь $\omega_1, \omega_2$ тойргуудын $B_2A_3$-ээс ялгаатай дотоод ерөнхий шүргэгч байг. $\ell(\omega_1, \omega_2) = |B_2A_3|$ $\ell(\omega_2, \omega_3)$ нь $\omega_2, \omega_3$ тойргуудын $B_3C_1$-ээс ялгаатай дотоод ерөнхий шүргэгч байг. $\ell(\omega_2, \omega_3) = |B_3C_1|$ $\ell(\omega_3, \omega_1)$ нь $\omega_3, \omega_1$ тойргуудын $A_2C_2$-ээс ялгаатай дотоод ерөнхий шүргэгч байг. $\ell(\omega_3, \omega_1) = |A_2C_2|$ болно. $\ell(\omega_1, \omega_2)+$

$\ell(\omega_2, \omega_3) = \ell(\omega_1, \omega_3)$ батлахад хангалттай. $B_3C_1 + B_2A_3 = A_2C_2$ гэж харуулъя.
$B_2A_3 + B_3C_1 = DA_3 - DB_2 + BC_1 - B_3B = DA_1 - B_1D + BC_3 - BB_1 = A_2M - B_1D + BN + NC_3 - BB_1 = A_2M + NC_3 + BN - B_1D - B_1B = A_2M + MC_2 + BD - DB = A_2C_2$ болно.

**X-A3.** $\{1, 2, 3, ..., 2n\}$ олонлогийг $P_1 \cup P_2 \cup ... P_n$ гэсэн $n$ ширхэг олонлогт хуваая.
$P_a$ нь $a \in \mathbb{N}, 2^b(2a-1)$ ($b$-сөрөг биш бүхэл тоо) хэлбэрийн бүх тоонуудаас тогтоно гэе.
$\forall i \neq j,\ i, j \in \mathbb{N} \Rightarrow 2^m(2i-1) \neq 2^n(2j-1) \Rightarrow$ байх тул $P_i \cap P_j = \varnothing$ болно. Мөн $A$ нь нэг хэсгээс хоёр элемент агуулахгүй. Эсрэг тохиолдолд нэг нь нөгөөгөө хуваахад хүрнэ. Иймд $A$ нь нэг хэсгээс хоёр элемент агуулахгүй. Эсрэг тохиолдолд нэг нь нөгөө хуваахад хүрнэ. Иймд $A$ нь олонлог бүрээс яг нэг нэг элемент агулна. $t_a$-аар $A$-ийн $P_a$-д харъяалагддаг элементийг тэмдэглэе.
Мөн

$$3^k < 2n < 3^{k+1} \quad (1)$$

байдаг гэе. ($k \in \mathbb{N}$) тэгвэл $t_{\frac{3^0+1}{2}}, t_{\frac{3^1+1}{2}}, ..., t_{\frac{3^k+1}{2}}$ гэсэн $k+1$ ширхэг элементүүдийг авч үзье. Эдгээр нь зөвхөн 3 ба 2-ийн зэрэгтээс тогтоно гэдэг нь $t_a$-ийн хэлбэрээс харагдаж байна. $t_{\frac{3^0+1}{2}}$-ийг хуваадаг 2-ийн хамгийн их зэрэг нь $t_{\frac{3^1+1}{2}}$-ийг хуваадаг 2-ийн хамгийн их зэрэгтээс их байх ёстой. (Эсрэг тохиолдолд $t_{\frac{3^0+1}{2}} \mid t_{\frac{3^1+1}{2}}$-д хүрж бодлогийн гөхцөлд харшилна. ) $x \in \mathbb{N}$-ийг хуваадаг 2-ийн хамгийн их зэрэгтийг $v(x)$ гэе.
$\Rightarrow v(t_{\frac{3^0+1}{2}}) > v(t_{\frac{3^1+1}{2}}) > ... > v(t_{\frac{3^k+1}{2}}) \geq 0 \Rightarrow v(t_{\frac{3^0+1}{2}}) \geq k \Rightarrow t_{\frac{3^0+1}{2}} \geq 2^k$ болох юм. Мөн адилаар, хэрэв $\frac{2n}{3} < 3^b(2a-1) < 2n$ бол

$$t_a \geq 2^b(2a-1) \quad (2)$$

байхыг харж болно. (Учир нь $(2a-1)$-ыг 3-ын зэрэгтээр үржүүлсэн хэлбэрийн сондгой хуваагчтай гишүүдийг авч үзье. Эдгээр тоонууд нь $3^0(2a-1), 3^1(2a-1), ..., 3^b(2a-1)$ гэсэн хуваагчидтай ба тухайлбал $2^t \cdot 3^0(2a-1), 2^s \cdot 3^1(2a-1)$ тоонуудын хувьд $t > s$ байх л боломжтой юм. Иймд дээрх тоонуудыг хуваах 2-ийн хамгийн их зэрэг нь эрс буурах дараалал болно. $\Rightarrow v(t_a) \geq b \Rightarrow t_a \geq 2^b(2a-1), t_a = 2^b \cdot 3^0(2a-1)$. )
Одоо $t_a < 2^k$ байг. $\Rightarrow \frac{2n}{3} < 3^b(2a-1) \overset{(2)}{\leq} \left(\frac{3}{2}\right)^b t_a < 2^k \left(\frac{3}{2}\right)^b \Rightarrow \frac{2n}{3} <$

$2^k\left(\frac{3}{2}\right)^b$ гэж гарна. $\Rightarrow 2^k\left(\frac{3}{2}\right)^b > \frac{2n}{3} \overset{(1)}{>} 3^{k-1} \Rightarrow$

$$2^{k-b} > 3^{k-b-1} \tag{3}$$

болно. Хэрэв $k > b$ бол (3) худал болно. $\Rightarrow b \geq k-1$ гэж гарна. $\Rightarrow 2^k > t_a = 2^b(2a-1) \geq 2^{k-1}(2a-1)$ гэсэн давхар тэнцэтгэл биш гарна. Эндээс $2^k \geq 2^{k-1}(2a-1) \Rightarrow 2 \geq 2a-1 \Rightarrow \frac{3}{2} \geq a \Rightarrow a = 1$ болно. $\Rightarrow t_a = 2^b$ гэвч $2^b < 2^k$ болоход хүрч $b \geq k-1$-д зөрчив. Иймд $A$-ийн дурын элемент нь $2^k$-аас багагүй. $m_A = 2^k$ болохыг харуулъя.
$t_a = 2^{f(a)}(2a-1)$
( Энд $f(a)$ нь $\frac{2n}{3} < 3^{f(a)}(2a-1) < 2n$ байх тоо) байхаар байгуулъя. Энэ нь бодлогын нөхцөл хангахыг харуулъя.
Эсрэгээс нь $x, y \in \mathbb{N} : 2^{f(x)}(2x-1) \mid 2^{f(y)}(2y-1)$ байг $\Rightarrow$
$\begin{cases} f(y) \geq f(x) \quad (4) \\ 2x-1 \mid 2y-1 \end{cases}$ байх ёстой. $\Rightarrow 2y-1 \geq 3(2x-1) \Rightarrow 3^{f(x)+1}(2x-1) > 2n > 3^{f(y)}(2y-1) \geq 3^{f(y)+1}(2x-1) \Rightarrow f(x) > f(y)$ болж (4)-д зөрчив. Иймд хариу: $3^k < 2n < 3^{k+1} \quad (k \in \mathbb{N})$ байх $k$-ийн хувьд $2^k$ байна. ▼

**X-B1.** $a$- сондгой үед $a \mid n^2 \Rightarrow n^2 = ak \Rightarrow a + n^2 = a + ak = a(k+1)$. Хэрэв ямар нэг $p$-ийн $a$- г хуваадаг хамгийн их зэрэг нь сондгой бол $\Rightarrow \ ak = n^2 \Rightarrow p|k \Rightarrow p \nmid k+1 \Rightarrow a(an+1)$ нь бүтэн квадрат биш.
$a = 2b$ гэе. $\Rightarrow b \mid n^2 \Rightarrow n^2 = b \cdot s \Rightarrow a + n^2 = 2b + bs = b(s+2)$. Өмнөхтэй адилаар ямар нэг сондгой $p$ анхны тооны хувьд $b$-г хуваадаг хамгийн их зэрэг нь тэгш $\Rightarrow b = 2^m \cdot c^2 \Rightarrow b$
$b$ нь бүтэн квадрат байж болохгүй тул $2 \nmid m \Rightarrow b = 2 \cdot \ell^2 \Rightarrow s = 2 \cdot r^2 \Rightarrow 2\ell^2(2r^2+2) = 4\ell^2(r^2+1)$ нь бүтэн квадрат биш.

**X-B2.** $a_1 = \frac{PB_1}{B_1A_1}, a_2 = \frac{PB_2}{B_2A_2}, a_3 = \frac{PB_3}{B_3A_3}, a_4 = \frac{PB_4}{B_4A_4}$ гэе. Хавтгайн $\vec{OX}, \vec{OY}, \vec{OZ}$ (Энд $O, X, Y, Z$ дурын цэгүүд) хувьд $\vec{OX} = \lambda \cdot \vec{OY} + \mu \cdot \vec{OZ} \quad \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ болдгийг санаж. Үүнийг цаашид хялбараар $X = \lambda \cdot Y + \mu \cdot Z$ гэж бичье. $a_1 = \frac{PB_1}{B_1A_1} \Rightarrow B_1 = \frac{a_1A_1 + P}{a_1 + 1}, \frac{a_1A_1 + a_2A_2 + P}{a_1 + a_2 + 1}$ цэгийг авч үзье.

$$\frac{a_1A_1 + a_2A_2 + P}{a_1 + a_2 + 1} = \frac{(a_1+1) \cdot \dfrac{a_1A_1 + P}{a_1 + 1} + a_2A_2}{a_1 + a_2 + 1} = \frac{(a_1+1)B_1 + a_2A_2}{(a_1+1) + a_2}$$

$\Rightarrow \frac{a_1A_1 + a_2A_2 + P}{a_1 + a_2 + 1}$ цэг нь $B_1A_2$ дээр оршино. Үүнтэй адилаар уг цэг

нь $A_1B_2$ дээр оршихыг харж болно.
Иймд $\dfrac{a_1A_1+a_2A_2+P}{a_1+a_2+1}$ цэг нь $A_2B_1$ ба $A_1B_2$-ийн огтлол дээр оршино.
Иймд $C_{12}=\dfrac{a_1A_1+a_2A_2+P}{a_1+a_2+1}$ болно. Үүнтэй адилаар $C_{34}=\dfrac{a_3A_3+a_4A_4+P}{a_3+a_4+1}$ болно.

$$Q=\frac{a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+a_4A_4+2P}{a_1+a_2+a_3+a_4+2}$$

-ийн хувьд

$$Q=\frac{(a_1A_1+a_2A_2+P)+(a_3A_3+a_4A_4+P)}{(a_1+a_2+1)+(a_3+a_4+1)}=$$

$$=\frac{(a_1+a_2+1)C_{12}+(a_3+a_4+1)C_{34}}{(a_1+a_2+1)+(a_3+a_4+1)}$$

$\Rightarrow\left(\dfrac{C_{12}Q}{QC_{34}}=\dfrac{a_3+a_4+1}{a_1+a_2+1}\right)\quad Q\in C_{12}C_{34}$ болно.
Үүнтэй адилаар $Q\in C_{13}C_{24}$ ба $Q\in C_{14}C_{23}$ гэж баталж болно. $\Rightarrow Q=C_{12}C_{34}\cap C_{13}C_{24}\cap C_{14}C_{23}$ ▲

**X-B3.** $n$ – ын хамгийн бага утга нь 25.

Сонгох хариуг 1,2,3,4 гэе. Оюутны тестийг хариулсан хариуг $(a,b,c,d,e)$ гэж тэмдэглэе. Энд $a,b,c,d,e\in\{1,2,3,4\}$ байна.

$$\big\{(1,b,c,d,e),(2,b,c,d,e),(3,b,c,d,e),(4,b,c,d,e)\big\},\quad b,c,d,e\in\{1,2,3,4\}$$

дөрвөн элементтэй дэд олонлогуудыг авч үзье. Ийм чанартай ялгаатай дэд олонлогууд нийт 256 ширхэг байна. $2008>256\times7=1792$ байх тул ямар нэгэн $A$ дэд олонлогт бүгд орох найман ширхэг 5-т олдоно. Эдгээр 5-тууд нь оюутны тестийн сонголтыг илэрхийлэх тул $A_1,A_2,\ldots,A_8$ оюутнуудын хариулт гэе. Энэ найман оюутныг хасахад үлдэх 2000 оюутны хувьд тестийн сонголт нь ямар нэгэн $B$ дэд олонлогт бүгд орох $B_1,B_2,\ldots,B_8$ оюутнууд олдоно. Дээрхтэй адилаар тестийн сонголт нь ямар нэг $C$ олонлогт орох $C_1,C_2,\ldots,C_8$ оюутнууд олдоно. Эдгээр 24 оюутнуудаас дурын дөрвөн оюутныг сонгоход аль нэг хоёр оюутны тестийн сонголт нь $A,B$ ба $C$ дэд олонлогуудын нэгэнд орно. Тэдгээр оюутнууд нь $A_1$ ба $A_2$ гэж үзэж болно. Тэгвэл $A_1$ ба $A_2$ оюутны тестийн сонголт зөвхөн эхний асуултын хувьд л ялгаатай байж болно. Энэ нь бодлогын шаардлагыг хангахгүй. Иймд $n\geq25$ болно.

$$D=\big\{\,(a,b,c,d,e)\mid a+b+c+d+e\equiv0\pmod 4,\quad a,b,c,d,e\in\{1,2,3,4\}\big\}$$

байх тестийн хариултуудын олонлогийн авч үзье. $|D| = 256$ ба $D$ олонлогийн аливаа хоёр 5-т бүр ядаж хоёр байраараа ялгагдана. $D$ олонлогоос таван элементийг хасахад үлдэх 251 ширхэг хос бүрт харгалзах тестийн сонголтыг сонгосон найман оюутан байсан гэе ($251 \times 8 = 2008$ оюутан). Тэгвэл $25 = 3 \times 8 + 1$ байх тул дурын 25-н оюутнуудаас тестийн сонголтууд нь (5-тууд) өөр хоорондоо ялгаатай байх дөрвөн оюутныг сонгож чадна. Энэ ялгаатай 5-туud нь ядаж хоёр байраараа ялгагдана. Иймд $n = 25$ байна.

# ММО-43, XI ангийн III даваа

Б. Батбаясгалан

**XI-A1** Тус бүрдээ $n$ сурагчтай гурван сургуулийн сурагч бүр нөгөө хоёр сургуулиас нийт $n+1$ сурагчтай найз. Тэгвэл аль ч хоёр нь хоорондоо найз, өөр өөр сургуульд сурдаг гурван сурагч олдоно гэж батал.

**XI-A2** $x$, $y$ эерэг бодит тоонуудын геометр дундаж нь $g$ байг. Хэрэв $g \geq 3$ бол

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} \geq \frac{2}{\sqrt{1+g}},$$

харин $g \leq 2$ бол

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+g}}$$

болохыг тус тус батал.

**XI-A3** $P$ нь $\triangle ABC$ гурвалжны багтаасан тойргийн $BC$ нум дээр орших дурын цэг ($A$ ба $P$ нь $BC$ талын 2 талд оршино). $\triangle PAB$ ба $\triangle PCA$-д багтсан тойргийн төвүүд ба $P$ цэгийг дайрсан тойргууд ($P$ цэг $BC$ нум дээгүүр хөдлөхөд олон тойрог үүснэ) бүгд ерөнхий цэгтэй гэж батал.

**XI-B1** $k \geq 3$ натурал тоо бөгөөд $n > C_k^3$. $a_i$, $b_i$, $c_i$, $(1 \leq i \leq n)$ нь $3n$ ширхэг ялгаатай бодит тоонууд байг. Тэгвэл $a_i+b_i$, $a_i+c_i$, $b_i+c_i$ тоонуудаас $k+1$ ялгаатай тоо сонгож болохыг батал. $n = C_k^3$ тохиолдолд дээрх өгүүлбэр биелэх албагүйг харуул.

**XI-B2** Дартсын тэмцээнд $n$, $(n \geq 4)$ тамирчин оролцов. Тамирчид өөрсдийн дугаартай ижил дугаартай сумыг шидэх ба бүгд эхний шидэлтээ хийсний дараа 1 дугаартай тамирчин өөрийн сумыг байнаас авч 2, 3, 4 дугаартай сумаар үүсэх гурвалжны хүндийн төв рүү шидэж онов. Энэ мэтчилэн тамирчин бүр өөрийн ээлжинд сумаа байнаас авч өөрийнхөө дараа шидэх 3 тамирчины дугаартай ижил дугаартай сумнуудаар үүсэх гурвалжны хүндийн төв рүү шидэж онож байв. Хэзээ нэгэн цагт бүх сум 1 радиустай дугуй дотор орно гэж батал. Тамирчид өөрсдийн дугаарын дагуу тойргоор сумаа шиднэ.

**XI-B3** $l$ нь $\triangle ABC$-ийн $BC$ талын дундажийг дайрсан периметрийг хагаслан хуваах шулуун байг. $AB < AC$ ба $l$-тэй параллель, $\triangle ABC$-ийн талбайг хагаслан хуваах шулуун $BC$ талыг $E$ цэгт огтолдог бол

$$\frac{CE}{EB} = \frac{AC}{\sqrt{2(AC+AB)AC} - AC}$$

байна гэж батал.

**X-A1.** I сургуулийн ямар нэг $x$ сурагч авч үзье. $x$ нь II сургуулийн $k$ сурагчтай, III сургуулийн $n-k+1$ сурагчтай найз гэе. $x$-тэй найз II сургуулийн $y$ сурагчийг авч үзье. Энэ сурагч маань $x$-ийн ямар нэг найзтай найз бол бие биеэ таньдаг 3 сурагч олдоно. Иймд ийм биш гэе. Тэгвэл $y$ нь III сургуулиас хамгийн ихдээ $n-(n-k+1) = k-1$ сурагч л таних боломжтой. Эндээс хэрэв бие биеэ таньдаг 3 сурагч олдохгүй бол сурагчдын аль нэг сургуулиас таньдаг сурагчдийн тоог багасгаад байх боломжтой болж байна. Гэтэл энэ нь боломжгүй юм.

**X-A2.** Тэнцэтгэл бишид ерөнхий хувиар өгч хоёр талыг нь квадрат зэрэгт дэвшүүлбэл

$$(1+g)(2+x+y+2\sqrt{(1+x)(1+y)}) \text{ ба } 4(1+x)(1+y)$$

илэрхийллүүдийг жиших хэрэгтэй болно.

$$a = \frac{x+y}{2} \text{ ба } t = \sqrt{(1+x)(1+y)} = \sqrt{1+2a+g^2}$$

$a \geq g$ тул $t \geq \sqrt{1+2g+g^2} = 1+g \quad (*)$ байна.

$g \geq 3$ үед $(1+g)(1+a+t) \geq 2t^2$ тэнцэтгэл бишийг батлах шаардлагатай.

$(*)$-оос $(1+g)t \geq (1+g)^2$ болох тул

$$(1+g)(1+a) + (1+g)^2 \geq 2 + 4a + 2g^2$$

гэж батлахад хангалттай. Хаалтыг задлаад эмхтгэвэл $-g^2 + ag - 3a + 3g = (g-3)(a-g) \geq 0$ болно. Сүүлийн тэнцэтгэл биш $g \geq 3$ үед үнэн тул тэнцэтгэл биш батлагдав.

$g \leq 2$ бол $(1+g)(1+a) + (1+g)t \leq 2t^2 \quad (**)$ тэнцэтгэл бишийг батлах шаардлагатай. Өмнөхтэй төстэйгээр $(2-g)(a-g) \geq 0$ тэнцэтгэл бишийг гаргаж авч үзье. Үүнийг задлаж эмхтгэвэл $t^2 \geq 1 + 2g + ag$ болно. Үүнийг ашиглан $(**)$-ийн баруун талыг доороос нь үнэлбэл $t^2 + (1+2g+ag) \leq 2t^2$ болно. Иймд $(**)$-ийн оронд

$$(1+g)(1+a) + (1+g)t \leq t^2 + 1 + 2g + ag \quad (**)'$$

тэнцэтгэл бишийг батлахад хангалттай. Үүнийг хялбарчилбал

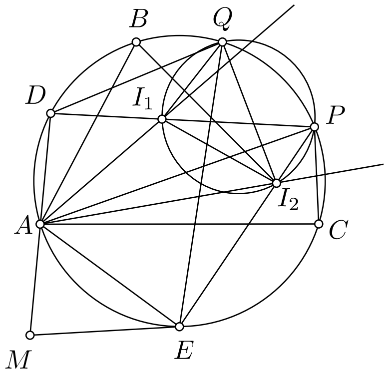
$$(1+g)t \leq t^2 - a + g = 1 + a + g + g^2 \quad (***)$$

болно. Үүнийг Кошийн тэнцэтгэл биш ашиглан хялбархан баталж болно.

$$(1+g)t \leq \frac{(1+g)^2 + t^2}{2} = 1 + a + g + g^2$$

Бодолтоос зөвхөн $x = y$ үед тэнцэл биелэх нь гарна.

**X-A3.** *$D$ ба $E$ нь харгалзан $AB$ ба $AC$ нумын дундаж, $I_1$ ба $I_2$ нь харгалзан $\triangle ABP$ ба $\triangle ACP$-д багтсан тойргийн төвүүд байг. $Q$ нь $\triangle ABC$-г багтаасан тойрог ба $\triangle PI_1I_2$ ийг багтаасан тойргийн $P$ ээс ялгаатай огтлолцолын цэг нь байг. $M$ нь $AD$ ийн үргэлжлэл дээр авсан $AD = AM$ байх цэг байг.*



$\angle I_1QI_2 = \angle I_1PI_2 = \angle DPE = \angle DQE$ байна. Мөн $PQ$ нумд тулсан өнцгүүд тул $\angle QEI_2 = \angle QDI_1$. Эндээс $\triangle QEI_2 \sim \triangle QDI_1$ болно. Иймд $\frac{QI_2}{QI_1} = \frac{QE}{QD}$ болно. Мөн $\angle I_1QI_2 = \angle DQE$ болохыг тооцвол $\triangle I_1QI_2 \sim \triangle DQE$ болно.

$\angle EAI_2 = \frac{\angle APC + \angle PAC}{2} = \angle AI_2E$ тул $AE = EI_2$ байна. Үүнтэй адилаар $DI_1 = DA = AM$ болно. $\frac{QI_2}{QI_1} = \frac{EI_2}{DI_1} = \frac{AM}{AE}$ Мөн $\angle MAE = \angle DPE = \angle I_1QI_2$ учраас $\triangle I_1QI_2 \sim \triangle DQE \sim \triangle MAE$ болно.

$P$ цэг $BC$ нумаар гүйхэд $D, E, M$ цэгүүд тогтмол байна. $\triangle DQE \sim \triangle MAE$ тул $Q$ цэг ч тогтмол байна. Энэ нь $I_1PI_2$-г багтаасан тойргууд бүгд $Q$ гэсэн тогтмол цэгт огтлолцоно гэсэн үг.

**X-B1.** Эсрэгээс нь $a_i + b_i$, $a_i + b_i$, $b_i + c_i$ хэлбэрийн тоонуудаас хамгийн ихдээ $k$ ялгаатай тоо сонгож болдог гээд эдгээр тоонуудын олонлогийг $T$ гэе. Дурын $1 \le i \le n$-ийн хувьд $a_i + b_i,\ a_i + b_i,\ b_i + c_i$ тоонууд хос хосоороо ялгаатай тул $T$-ийн ямар нэг 3 элементтэй дэд олонлогийг үүсгэнэ. Нөгөө талаас $a_i+b_i = x$, $a_i+c_i = y$, $b_i+c_i = z$ гэвэл $a_i = (x+y-z)/2$, $b_i = (x+z-y)/2$, $c_i = (y+z-x)/2$ болох тул $\{x,\ y,\ z\}$ дэд олонлог нь $\{a_i,\ b_i,\ c_i\}$ олонлогийг нэг утгатай тодорхойлно. Иймд

$$\mathrm{C}^3_{|T|} \le \mathrm{C}^3_k < n$$

болох тул $\{a_i,\ b_i,\ c_i\} = \{a_j,\ b_j,\ c_j\}$ байх $1 \le i < j \le n$ индексүүд олдох болж зөрчил үүсэв.

Нөгөө талаас $T = \{4, \ldots, 4^k\}$ ба $n = \mathrm{C}^3_k$ гэе. $T$-ийн 3 элементтэй дэд олонлогууд нь $T_1,\ T_2, \ldots, T_n$ ба $T_i = \{4^u,\ 4^v,\ 4^w\}$, $1 \le u < v < w \le k$ гэвэл $\{a_i,\ b_i,\ c_i\} = \{(4^u + 4^v - 4^w)/2,\ (4^u + 4^w - 4^v)/2,\ (4^v + 4^w - 4^u)/2\}$ болох ба натурал тоонууд нь 4-тийн тооллын системд нэг утгатай бичигдэнэ гэдгээс эдгээр тоонууд нь хоорондоо ялгаатай гэдэг нь гарна.

**X-B2.** Хавтгайд тэгш өнцөгт координатын систем сонгож авбал. $(x_l, y_l)$-ээр $l$ дэх удаад шидэгдсэн сумны байрлалыг тэмдэглэе. $(x_A, y_A)$, $(x_B, y_B)$, $(x_C, y_C)$ цэгүүд дээр оройтой гурвалжны хүндийн төвийн координат нь:

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

тул $x_m,\ m = 1,\ 2, \ldots$ дарааллын хувьд $3x_{m+n-1} = x_{m+2} + x_{m+1} + x_m$ $(*)$ гэсэн реккурент харьцаа биелэнэ. Энэ харьцааны характристек тэгшитгэл нь:

$$3x^{n-1} - x^2 - x - 1 = 0$$

болно. Энэ тэгшитгэлийн дурын 1-ээс ялгаатай шийд $\alpha$-ийн хувьд $|\alpha| < 1$ болохыг хялбархан харж болох бөгөөд 1 нь давхар язгуур болохгүй (Математикийн мэргэжлийн курс II, 60-р хуудас өгүүлбэр 1). Нөгөө талаас $g(m)\alpha^m,\ |\alpha| < 1$ хэлбэрийн дарааллын хязгаар 0 (үүнд $g(m)$ нь дурын олон гишүүнт бөгөөд $\alpha$ нь комплекс байж болно) байдаг.

$(*)$ реккурент харьцааны ерөнхий шийд нь онол ёсоор:

$$x_m = \sum g_i(m)\alpha_i^m$$

хэлбэртэй байна (Математикийн мэргэжлийн курс II, 100-р хуудас теорем 1-ийг үзнэ үү). 1 нь характеристик олон гишүүнтийн давхардаагүй язгуур тул үүнийг

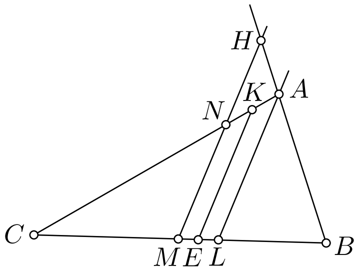
$$x_m = a + \sum p_i(m)\alpha_i^m,\ |\alpha_i| < 1$$

хэлбэртэй бичиж болох тул $x_m$ дараалал $a$ хязгаартай болж байна. $y_m$ дарааллын хувьд төстэйгээр:

$$y_m = b + \sum q_i(m)\beta_i^m, \ |\beta_i| < 1$$

болох бөгөөд эндээс $(x_m, y_m)$ цэгүүд нь $(a, b)$ цэг рүү нийлэх нь харагдаж байна. Өөрөөр хэлбэл тодорхой нэг $N$ дугаараас хойш сумнууд маань $(a, b)$ цэгт төвтэй 1 радиустай дугуй руу шидэгдэнэ.

**X-B3.** $BC$ талын дундажыг дайруулан $\measuredangle CAB$-ийн биссектрисстэй параллел шулуун татъя. Уг шулууны $AC$-тэй огтлолцсон цэг $N$, $AB$-тэй огтлолцсон цэг $H$ гэе. Тэгвэл $\measuredangle NHA = \measuredangle HNA$ болно.



$\triangle MHB$ ба $\triangle CMN$-ийн хувьд синусын теорем бичвэл

$$\frac{\sin(\measuredangle HMB)}{HB} = \frac{\sin(\measuredangle MHB)}{MB} = \frac{\sin(\measuredangle CNM)}{MC} = \frac{\sin(\measuredangle CMN)}{CN}$$

$\sin(\measuredangle HMB) = \sin(\measuredangle CMN)$ тул $HB = CN$, $AN = AH$ учраас $MN$ шулуун маань $M$ дундажыг дайрсан периметрийг хагаслан хуваах шулуун болно. Тийм шулуун зөвхөн нэг орших тул $MH$ шулуун нь $l$ шулуун болно. $EK$ талбайг хагаслан хуваах шулуун маань биссектрисстэй параллел болно. $S_{CEK} = S_{EKAB}$ учир

$$\frac{CE}{BC} \cdot S \cdot \frac{CE}{CL} = \frac{EB}{BC} \cdot S + \frac{CE}{BC} \cdot S\left(1 - \frac{CE}{CL}\right)$$

болно. Энд $S$ нь $ABC$ гурвалжны талбай. Эндээс $2 \cdot \dfrac{CE^2}{BC \cdot CL} = \dfrac{EB}{BC} + \dfrac{CE}{BC} = 1$ буюу $CE^2 = \dfrac{BC \cdot CL}{2}$ болно.

$$\frac{BC^2}{CE^2} = \frac{2BC}{CL} = \frac{2BC}{\big(AC/(AC + AB)\big)BC} = \frac{2(AC + AB)}{AC}$$

Эндээс $\dfrac{EC}{EB} = \dfrac{AC}{\sqrt{2(AC + AB)AC} - AC}$ болно.

# ММО-43, XI ангийн IV даваа

Б. Батбаясгалан

**XI-A1 (У. Батзориг)** $ABC$ гурвалжны $BC$ талын дундаж цэг $M$. $A$ оройн гадаад өнцгийн биссектрис $BC$-г $D$ цэгт огтолдог байг. $\triangle ADM$-г багтаасан тойрог $AB$, $AC$ шулуунуудыг харгалзан $E$ ба $F$ цэгт огтолдог байг. Хэрэв $N$ нь $EF$-ийн дундаж бол $MN \parallel AD$ гэж батал.

**XI-A2 (Г. Батзаяа)** $n \geq 2$ натурал тооны хувьд $n$-ээс бага түүнтэй харилцан анхны тоонуудын үржвэрийг $a_n$ гэе.

а) $n \mid a_n + 1 \iff n = 2,\ 4,\ p^\alpha,\ 2p^\alpha$ гэж батал.

б) $n \mid a_n - 1 \iff n \neq 2,\ 4,\ p^\alpha,\ 2p^\alpha$ гэж батал.

(Энд $p$-сондгой анхны тоо ба $\alpha \in \mathbb{N}$).

**XI-A3 (С. Төмөрбат)** Хавтгайд $ABC$ гурвалжин ба түүний гадна орших $P$ цэг өгөгдөв. Хэрэв $P$ цэгийг $AB$, $AC$, $BC$ шулуунуудын хувьд тэгш хэмтэй цэгт шилжүүлж болох бол уг үйлдлүүдийн тусламжтайгаар $ABC$ гурвалжин дотор (хүрээн дээр байж болно) оруулж чадахыг батал.

**XI-B1 (У. Батзориг)** $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$; $a,\ b,\ c > 0$ бол

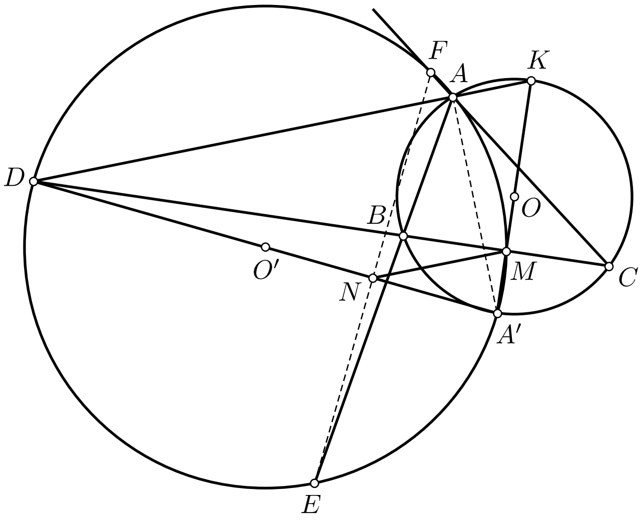
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc}}$$

гэж батал.

**XI-B2 (А. Ганбат)** $n \times n$ хүснэгтийг аль ч мөр, аль ч багана дахь тоонуудын нийлбэр хоорондоо тэнцүү байхаар сөрөг биш тоонуудаар бөглөв. Аль ч 2 нь нэг мөр, нэг баганад үл орших $n$ ширхэг тоог аваад бүгдээс нь нэгэн ижил тоог сөрөг тоо гарахгүй байхаар хасах үйлдэл зөвшөөрөгдөв. Энэ үйлдлийн тусламжтайгаар хүснэгтийн бүх тоог 0 болгож болох уу?

**XI-B3 (Г. Батзаяа)** Нэгэн зэрэг тойрогт багтсан ба тойрог багтаасан $ABCD$ дөрвөн өнцөгт өгөгдөв (аль ч диагональ ба тал нь багтаасан тойргийн диаметр биш). $A$ ба $C$ оройнуудын гадаад өнцгийн биссектрисүүд $P$ цэгт, $B$ ба $D$ оройнуудын гадаад өнцгийн биссектрисүүд $Q$ цэгт огтлолцоно. $J$, $O$ нь багтсан ба багтаасан тойргийн төвүүд бол $OJ \perp PQ$ гэж батал.

**X-A1.** Багтаасан тойргийн төвийг $O$ гэе. $\triangle ABC$-ийн $\measuredangle A$-ийн биссектрисс нь $ABC$-г багтаасан тойрогтой $A'$ цэгт огтлолцдог байг.



$MA' \perp MD$ ба $AA' \perp AD$ тул $ADA'M$ нь $ADM$-ийг багтаасан тойрогт багтана. Энэ тойргийн төвийг $O'$ гэе. $DA$-г үргэлжлүүлэхэд $O$ төвтэй огтлолцоход үүсэх цэгийг $K$ гэе. Тэгвэл $K$ нь $O$ төвтэй тойргийн $A'$ цэгийн хувьд тэгш хэмтэй цэг болохыг хялбар харж болно. $\measuredangle EAA' = \measuredangle A'AF$ юмуу $\measuredangle EAA' = 180^\circ - \measuredangle A'AF$ тул синусын теоремоор $A'F = A'E$ болох тул $DA'$ диаметр дээр $N$ цэг оршино. Иймд $\triangle DEF \sim \triangle KBC$ гэж хялбар хэлж болно. Учир нь

$$\measuredangle EFD = \measuredangle EAD = \measuredangle CAK = \measuredangle CBK$$

$\dfrac{DN}{NA'} = \dfrac{KM}{MA'}$. Иймд $MN \parallel AD$.

**X-A2.** 1) $n = 2^\alpha$ байг. $\alpha = \overline{1,3}$ үед илэрхий. $S = \{1, 2^{\alpha-1}-1, 2^{\alpha-1}+1, 2^\alpha - 1\}$ ба $\alpha \geq 4$ үед $A = \mathbb{Z^*}_{2^\alpha} \setminus S$ гэе. $a^{-1} = a$ эсвэл $a^{-1} \in S$ байх $a \in A$-ийн хувьд $a \in S$ тул $a \in A \Rightarrow a^{-1} \in A$ байна. Иймд $\prod_{a \in A} a \equiv 1 \pmod{2^\alpha}$ болох тул

$$a_n \equiv 1(2^{\alpha-1}-1)(2^{\alpha-1}+1)(2^\alpha - 1)\prod_{a \in A} a \equiv 1 \pmod{2^\alpha}$$

2) $n = p^\alpha$, $p > 2 \in \mathbb{P}$ байг. $S = \{1, p^\alpha - 1\}$ ба $A = \mathbb{Z}^*_{p^\alpha} \setminus S$ гэе. $a^{-1} = a$ эсвэл $a^{-1} \in S$ байх $a \in A$-ийн хувьд $a \in S$ тул өмнөхийн адил $a \in A \Rightarrow a^{-1} \in A$ байна. Иймд $\prod_{a \in A} a \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ болох тул

$$a_n \equiv 1(p^\alpha - 1)\prod_{a \in A} a \equiv -1 \pmod{p^\alpha}$$

3) $n = 2p^\alpha$, $p > 2 \in \mathbb{P}$ байг. $S = \{1, 2p^\alpha - 1\}$ ба $A = \mathbb{Z}^*_{2p^\alpha} \setminus S$ гэе. $a^{-1} = a$ эсвэл $a^{-1} \in S$ байх $a \in A$-ийн хувьд $a \in S$ тул өмнөхийн адил $a \in A \Rightarrow a^{-1} \in A$ байна. Иймд $\prod_{a\in A} a \equiv 1 \pmod{2p^\alpha}$ болох тул

$$a_n \equiv 1(2p^\alpha - 1)\prod_{a\in A} a \equiv -1 \pmod{2p^\alpha}$$

4) $n \neq 2^\alpha,\ p^\alpha,\ 2p^\alpha$ үед $N = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ гэе. $\dfrac{n}{2^\alpha} \geq 3$ ба $\dfrac{n}{p_j^{\alpha_j}} \geq 3$ тул $\varphi\left(n/2^\alpha\right),\ \varphi\left(n/p_j^{\alpha_j}\right)$ нь тэгш (1) байна.

ЛЕММА $(n, n') = 1$ *бол* $\forall r \in \mathbb{Z}^*_n$, $\forall r' \in \mathbb{Z}^*_{n'}$*-ийн хувьд*

$$\begin{cases} x \equiv r & (n) \\ x \equiv r' & (n') \end{cases}$$

*тэгшитгэл нь* $x \in \mathbb{Z}^*_{nn'}$ *байх цор ганц шийдтэй.*

Леммээс "$\mathbb{Z}^*_{nn'}$-олонлогийн элементүүдийг $n$ модулиар жишихэд $\mathbb{Z}^*_n$-ийн элемент бүр нь $\varphi(n')$ удаа давтагдана" (2) өгүүлбэр мөрдөн гарна. Иймд

$$\prod_{a\in\mathbb{Z}^*_n} a \overset{(2)}{\equiv} \Big(\prod_{a\in\mathbb{Z}^*_{p_i^{\alpha_i}}} a\Big)^{\varphi(n/p_i^{\alpha_i})} \equiv (-1)^{\varphi(n/p_i^{\alpha_i})} \overset{(1)}{\equiv} 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

мөн

$$\prod_{a\in\mathbb{Z}^*_n} a \overset{(2)}{\equiv} \Big(\prod_{a\in\mathbb{Z}^*_{2^\alpha}} a\Big)^{\varphi(n/2_i^\alpha)} \equiv (\pm 1)^{\varphi(n/2^\alpha)} \overset{(1)}{\equiv} 1 \pmod{2^\alpha}$$

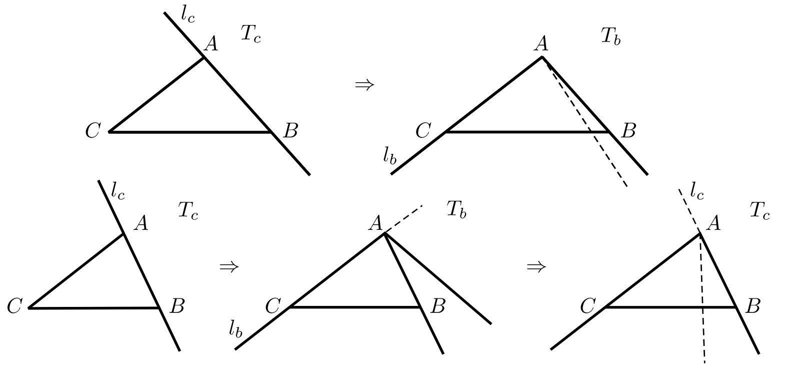
тул $n \mid a_n - 1$.

1) – 4)-өөс зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл болох нь харагдана.

**X-A3.** $ABC$ гурвалжны $BC$, $CA$, $AB$ талуудыг агуулсан шулуунууд нь харгалзан $l_a$, $l_b$, $l_c$ ба $A$ орой дахь өнцөг хамгийн их гэе. $T_x$-ээр $l_x$ шулууны хувь дахь тэнхлэгийн тэгш хэмийг тэмдэглэе.

ЛЕММА 1 *Хавтгайн дурын цэгийг зөвхөн* $l_b$ *ба* $l_c$ *шулуунуудын хувьд тэгш хэмтэй цэгт шилжүүлэх үйлдлүүдээр* $A$ *өнцөгт багтааж болно.*

Баталгаа. Хэрэв $\measuredangle A \geq 90°$ бол $T_b$, $T_b \circ T_c$ үйлдлүүдийн аль нэгээр, $60° \leq \measuredangle A < 90°$ бол $T_b$, $T_b \circ T_c$, $T_c \circ T_b \circ T_c$ үйлдлүүдийн аль нэгээр $\angle A$-д багтана.



ЛЕММА 2 *Хавтгайн дурын $P$ цэгийг уг цэгээс гурвалжны $A$ орой хүртэлх зай нь өөрчлөгдөхгүй байхаар $\angle A$-д багтаах $\varphi_P$ гэсэн тэгш хэмүүдийн композици олдоно.*

Баталгаа. Өмнөх леммээс шууд мөрдөнө.

Лемма 1-ээс зөвхөн $A$ өнцөгт багтсан цэгүүдийг л $ABC$ гурвалжны дотор оруулж болно гэдгийг л харуулахад хангалттай болох нь харагдаж байна.

$A'$ нь $l_a$-ийн хувьд $A$-тай тэгш хэмтэй цэг гэе. $A'$-ийг дайруулан $BC$-тэй параллель шулуун татаад түүний $AB$, $AC$ талуудын үргэлжлэлийг огтлох цэгүүдийг $B_1, C_1$ гэе.

ЛЕММА 3 *$\angle A$-ийн $AB_1C_1$ гурвалжны гадна орших $P$ цэгээс $A$ хүртэлх зайг $r_1$, $A'$ хүртэлх зайг $r_2$ гэвэл $r_1 - \dfrac{2h^2}{r_1} \geq r_2$ байна. Энд $h$ нь гурвалжны $A$ оройгоос буулгасан өндрийн урт.*

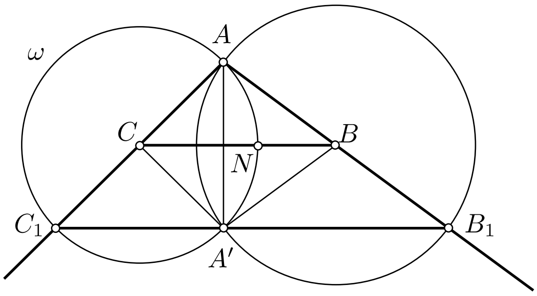
Баталгаа. $\triangle AA'P$-ийн $A'$ нь мохоо ба $AA' = 2h$ тул $r_1^2 \geq r_2^2 + 4h^2$ болно. Эндээс $r_1 - r_2 \geq \dfrac{4h^2}{r_1 + r_2} \geq \dfrac{2h^2}{r_1}$ болж батлагдав.

Лемма 3-аас бид $A$-ийн $AB_1C_1$ гурвалжны гадна орших дурын $P$ цэгийг $AB_1C_1$ гурвалжинд багтааж болох нь харагдаж байна. Учир нь $T_a$-аар $P$ нь $A$ цэгт дор хаяж $\dfrac{2h^2}{r_1}$ хэмжээгээр ойртох ба дараа нь түүнийг $\varphi_P$-ээр $A$-д буцааж багтаана. Энэ үйлдлийг давтахад $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq \cdots$ тул $n$ алхамын дараа $P$ нь $A$-д дор хаяж

$$\frac{2h^2}{r_1} + \cdots + \frac{2h^2}{r_n} \geq n \cdot \frac{2h^2}{r_1}$$

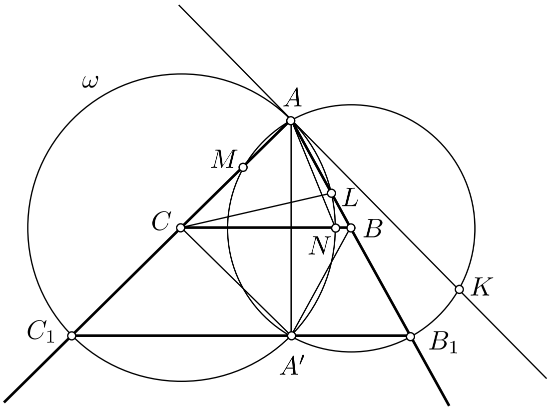
хэмжээгээр ойртоно. Энэ үйлдэл хязгааргүй үргэлжлэх боломжгүй тул $P$ цэг $AB_1C_1$ гурвалжин дотор орно. Одоо $\triangle AB_1C_1$ дотор байгаа цэгийг $\triangle ABC$-д оруулж чадахыг харуулахад хангалттай. $T_a$ тэгш хэмээр $A'BC$ гурвалжны цэгүүд $\triangle ABC$-д орох тул $A'B_1B$, $A'C_1C$ гурвалжны цэгүүдийг $\triangle ABC$-д оруулж чадахыг батлая. $B$ ба $C$ цэгүүдэд төвтэй харгалзан $AB$ ба $AC$ диаметртэй тойргуудыг авч үзье. $C$-д төвтэй тойргийг $\omega$, $\omega$-ийн $BC$-тэй огтлолцох цэгийг $N$ гэе.

Хэрэв $\angle A \geq 90^\circ$ бол эдгээр тойргууд нь $AB$, $AC$ талуудын үргэлжлэлтэй огтлолцоно.



Нөгөө талаас лемма 2-тэй төстэйгээр $(T_b \circ T_a)^k$, $T_a \circ (T_b \circ T_a)^k$ хэлбэрийн тэгш хэмүүдийн композицуудаар $\omega$ тойргийн бүх цэгийг $\omega$ тойргийн $CAN$ секторт оруулж болно. Өөрөөр хэлбэл $A'C_1C$ гурвалжны цэгүүдийг $ABC$ гурвалжин дотор оруулж чадна. Төстэйгээр $A'B_1B$ гурвалжны цэгүүдийг $ABC$ гурвалжин дотор оруулж чадна.

Хэрэв $60^\circ \leq \angle A < 90^\circ$ бол $\omega$ нь $AB$, $AC$ талуудтай огтлолцоно. $\omega$ тойргийн $AB$ талтай огтлолцох цэгийг $L$ ба $AC \perp AK$ гэе.



Өмнөхтэй ижлээр $\omega$ тойргийн бүх цэгийг $\omega$ тойргийн $CAN$ секторт оруулж болно. Энэ тохиолдолд $\omega$ тойргийн $AL$ нумд харгалзах сегментэд очих цэгүүдийг $\triangle ABC$-д оруулж чадна гэж батлахад хангалттай. $AN$ нь $\angle A'AK$-ийн биссектрисс болохыг харахад төвөггүй бөгөөд эндээс $\angle A'AB \geq \angle BAK$ тул $T_c$-ээр $AL$ сегмент $\triangle CAL$-д орно. Үүнтэй адилаар $A'B_1B$ гурвалжны цэгүүдийг $ABC$ гурвалжин дотор оруулж чадна. Эндээс батлах зүйл батлагдав.

**X-B1.** Цикл тэнцэтгэл биш тул $a$-г хамгийн их гэе. Нөгөө талаас $a \geq b \geq c$ үед

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\leq 0$$

тул $a \geq b \geq c$ гэж үзээд тэнцэтгэл бишээ батлахад явцуурахгүй.

Квадрат зэрэгт дэвшүүлбэл:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{c}+\frac{2c}{b}\geq\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}$$

гэж батлах шаардлагатай.

1°. $\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}-3=\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(a-b)(a-c)}{ac}$;

2°. $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}-3=\frac{(b-c)^2(b+c)^2}{b^2c^2}+\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^2b^2}$;

3°. $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=(b-c)^2+(a-b)(a-c)$ гэдгийг тус тус ашиглавал батлах тэнцэтгэл биш нь:

$$(b-c)^2M+(a-b)(a-c)N\geq 0$$

тэнцэтгэл бишид шилжинэ. Энд

$$M=\frac{2}{bc}+\frac{(b+c)^2}{b^2c^2}-\frac{9}{ab+bc+ca}$$
$$N=\frac{2}{ac}+\frac{(a+b)(a+c)}{a^2b^2}-\frac{9}{ab+bc+ca}$$

1) $b-c\geq a-b$ байг. Тэгвэл $2(b-c)^2\geq(a-b)(a-c)$ $(*)$ байна.

$$M\geq\frac{2}{bc}+\frac{4bc}{b^2c^2}-\frac{9}{ab+bc+ca}=$$
$$=\frac{6}{bc}-\frac{9}{ab+bc+ca}=\frac{6(ab+ac)-3bc}{bc(ab+bc+ca)}>0$$

$$M+2N \geq \frac{6}{bc} - \frac{18}{ab+bc+ca} = \frac{6(ab+ac)-12bc}{bc(ab+bc+ca)} \geq 0$$

$(*)$-оос

$$(b-c)^2M+(a-b)(a-c)N \geq \frac{1}{2}(a-b)(a-c)(M+2N) \geq 0$$

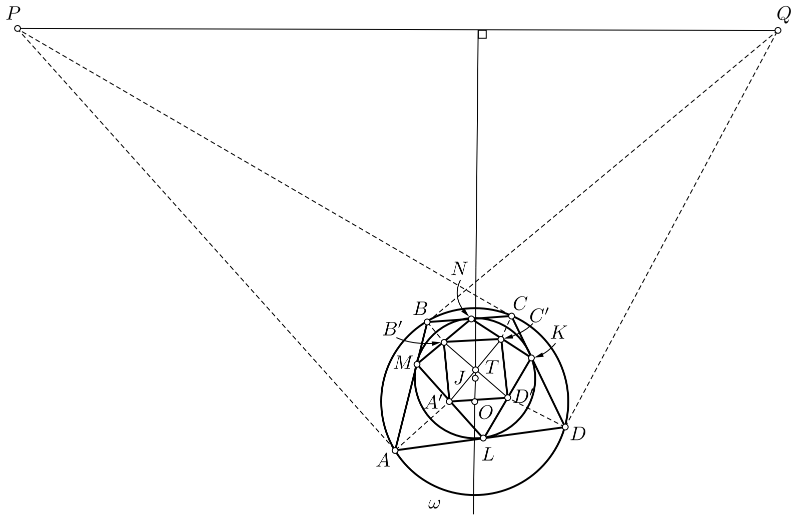
2) $b-c \leq a-b$ байг. $2b \leq a+c \quad (**)$ ба $M \geq 0$ байх нь илт.

$$N \geq \frac{2}{ac} + \frac{a+b+c}{ab^2} \overset{(**)}{\geq} \frac{2}{ac} + \frac{3}{ab} \geq \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{ac+ab} > \frac{9}{ab+bc+ca}$$

Тэнцэл зөвхөн $a=b=c$ үед л биелэнэ.

**X-B2.** Мөрүүд ба баганууд гэсэн 2 туйлтай граф авч үзье. Хэрэв $i$-р мөр $j$-р баганын элемент тэг биш бол $ij$ нь ирмэг, эсрэг тохиолдолд $ij$ нь ирмэг биш гэе. Энэ граф нь ядаж нэг ирмэгтэй бол тэр нь Холлын теоремийн (ОУ-ын сорилын бодлого харна уу) нөхцлийг биелүүлдэг гэдгийг харуулъя. Дурын $k$ ширхэг мөрийг сонгож авсан гэе. Хэрэв мөр ба баганын тоонуудын нийлбэрийг $s > 0$ гэвэл эдгээр $k$ ширхэг мөрийн тоонуудын нийлбэр $sk$ болно. Одоо эдгээртэй ирмэгээр холбогдсон багануудыг $B_1, \ldots, B_l$ гэе. $B_i$ баганы сонгогдсон мөрийн тоонуудын нийлбэрийг $s_i$ гэе. Мэдээж $s_i \leq s$ ба $sk = s_1 + \cdots + s_l$ байх нь ойлгомжтой. Эндээс $k \leq l$ болж байна. Иймд Холлын теорем ёсоор мөр бүрийг ялгаатай багануудад ирмэгээр холбогдсон байхаар харгалзуулж болно. Өөрөөр хэлбэл аль ч 2 нь нэг мөр, нэг баганад оршихгүй байхаар тэг биш $n$ тоо олж чадаж байна. Эдгээрийг хамгийн багаар нь багасгахад хүснэгтийн 0-ийн тоо нэмэгдэнэ. Мэдээж хүснэгтийн бүх тоо 0 болсон үед л дээрх үйлдлийг хийж чадахгүй нь ойлгомжтой.

**X-B3.** Дөрвөн өнцөгтөд багтсан тойрог $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ талуудыг харгалзан $M$, $N$, $K$, $L$ цэгүүдэд шүргэдэг. $MN$, $NK$, $KL$, $ML$ талуудын дундаж цэгүүд харгалзан $B'$, $C'$, $D'$, $A'$ ба багтсан тойргийн хувьд $P$ цэгийн поляр шулууныг $l_P$ гэж тус тус тэмдэглэе. ($A \in l_b \Leftrightarrow B \in l_A$ байдаг).



Иймд $Q \in l_{B'}$, $Q \in l_{D'} \Rightarrow B' \in l_Q$, $D' \in L_Q$ буюу $l_Q \equiv B'D'$. Үүнтэй адилаар $l_P \equiv A'C'$ болох ба $(B'D' \cap A'C') = T$ гэвэл $T \in L_Q$, $T \in L_P \Rightarrow Q \in l_T$, $P \in l_T$ буюу $l_T \equiv PQ$ болно. Мөн $JT \perp PQ$ болно. Иймд бид $O$, $J$, $T$ цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж баталвал хангалттай. Багтаасан тойргийг $\omega$ гээд багтсан тойргоор инверс авъя. $A$, $B$, $C$, $D \to A'$, $B'$, $C'$, $D'$ ба $\omega \to \omega'$ гэе. $A'B'C'D'$ нь параллелограмм ба тойрогт багтах тул тэгш өнцөгт болно. Иймд $T$ нь $\omega'$ тойргийн төв болох ба инверсээр $O$, $J$, $T$ цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

## ММО-43, Багын багшийн III даваа

Д.Ганзориг

**ББ-А1.** $p$ анхны тооны хувьд $\sqrt{m}+\sqrt{m+p}$ натурал тоо байх $m$-тоо олддог байх бүх $p$-г ол.

**ББ-А2.** Натурал тооноос түүний цифрүүдийн нийлбэрийг хасахад 2007 гарсан бол уг тоог ол.

**ББ-А3.** Гүдгэр 5-өнцөгтийн бүх орой болгон диагоналийн огтлолуудыг цэнхэр өнгөөр будав. Аль нэг тал эсвэл аль нэг диагональ дээрх будагдсан цэгүүдийг цэнхэр эсвэл улаанаар сольдог (цэнхэр$\longrightarrow$ улаан, улаан $\longrightarrow$ цэнхэр) үйлдлээр бүх цэгүүдийг улаан болгож болох уу?

**ББ-В1.** Бүх хуваагчдын нь сүүлчийн цифрүүдийн нийлбэр 33 байх 500-аас их 1000-аас бага сондгой натурал тоонуудыг ол.

**ББ-В2.** $x, y, z$ нь бодитой тоонууд бол

$$(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6})^2 \le \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{6}$$

байна гэж батал, хэдийд тэнцэлдээ хүрэх вэ?

**ББ-В3.** Огторгуй цэг бүрийг 5-өнгийн аль нэгээр , аль ч өнгөөр дор хаяж 1 цэг будагдсан байхаар будахад дор хаяж 4 өнгөөр бүх цэгүүд нь будагдсан хавтгай олдохыг батал.

**ББ-А1.** $p=2t+1$ бол $m=t^2$ гэж авна. $p=2$ бол $\sqrt{m}+\sqrt{m+2}\in\mathbb{N}$ байх $m$ олддог байг.

$$\sqrt{m+2}=y-\sqrt{m}\Rightarrow\sqrt{m}=\frac{2-y^2}{2y}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{m}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\sqrt{m+2}\in\mathbb{Z}$$

байх ёстой байна. Иймд $p$-нь бүх сондгой анхны тоо.

**ББ-А2.** $\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d.$

$$1000a+100b+10c+d-(a+b+c+d)=9(111a+11b+c)=2007$$

$$111a+11b+c=223$$

$a$-ийн боломж

$$a>1,\quad a<3\Rightarrow\quad a=2.$$

$$11b+c=1\quad b=0,\quad c=1$$

$d$-ямар ч тоо байж болно. $[2010,2019]$-бүх тоо.

**ББ-А3.** Диагоналиудын огтлолд үүсэх бөгөөд 5-өнцөгтийг авч үзье. Өгсөн үйлдэл нь энэ 5-өнцөгтийн яг 2 оройн өнгийг өөрчлөнө эсвэл үгүй.

**ББ-В1.** Нийлбэр нь 33 тэнцүү тул хуваагчдын тоо нь сондгой байна. $\Rightarrow$ тооны квадрат $\Rightarrow$ $[500, 1000]$-ын квадратуудыг шалгана. (729)

**ББ-В2.**

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{6}-(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6})^2=\frac{1}{6}(x-y)^2+\frac{1}{12}(x-z)^2+\frac{1}{18}(y-z)^2\geq 0$$

ба тэнцэлдээ $x=y=z$ үед хүрнэ.

**ББ-В3.** Бүх цэгүүд нь 3-өнгөөр будагдсан шулуун олдох бол илэрхий. Гурав ба түүнээс олон өнгөөр будагдсан шулууны хувьд түүнийг агуулсан уг шулууныхаас ялгаатай өнгөтэй цэгийг дайрсан хавтгайг татна. Одоо бүх шулуунууд 2-оос олонгүй өнгөөр будагдсан гэж үзье. 5-ялгаатай шулуун дээрхи 5 ялгаатай цэг авлаа. Эдгээрийн аль ч 4-нь 1-хавтгай дээр оршихгүй. Эдгээрийг хос хосоор нь холбосон 10 шулуун нь эдгээртэй паралелль биш ямар нэг хавтгайг 10 цэгт огтлолцоно. Эдгээр 10 цэг нь дор хаяж 4 өнгөөр будагдсан байна гэдэг нь илэрхий.

## ММО-43, БАГЫН БАГШИЙН IV ДАВАА

Д.Ганзориг

**ББ-А1 (Д.Ганзориг).** 43-оройтой графын ирмэгүүдийг 3 өнгөөр аль ч ижил өнгийг бүх ирмэгүүдийг хасахад холбоост граф үүсдэг байхаар будаж болдог бол уг граф хамгийн багадаа хэдэн ирмэгтэй байх вэ?

**ББ-А2 (Н.Дайвий-Од, П.Ренчинбал).** Хавтгай дээр дараахи нөхцөлүүд зэрэг биелдэг 12 цэг тэмдэглэж болохыг харуул. Үүнд

а) Тэдгээр дээр оройтой 3 ялгаатай квадрат олддог.

а) Тэдгээр дээр оройтой 16 ялгаатай зөв гурвалжин олддог.

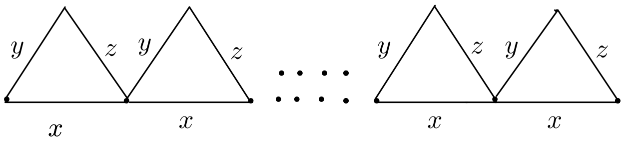
**ББ-А3 (А.Хашбаатар).** $ABCD$ паралелограммын хурц өнцгийн орой $A$ цэгийг дайрч $AB, AD$ хоёр тал болон $AC$ диагоналийг огтолсон тойргийг $B_1, C_1, D_1$ цэгт шүргэсэн гурван шулуун харгалзан $B, C, D$ оройг дайрчээ. Хэрэв $BB_1, CC_1, DD_1$- хэрчмүүдээр гурвалжин байгуулж болдог бол ямар гурвалжин байх вэ?

**ББ-В1 (Д.Ганзориг).** $N$-нь нэг шулуун дээр орших хос хосоороо үл огтлолцох $K$-ширхэг хэрчмүүдийн олонлог. Дурын 1-ээс ихгүй урттай хэрчмийг түүний төгсгөлүүд нь $N$-д харьялагдаж байхаар байрлуулж болдог бол $N$-ийн хэрчмүүдийн уртуудын нийлбэр $\frac{1}{k}$ -аас хэтрэхгүй гэж үзүүл.

**ББ-Б2 (Д.Батнасан, У.Батзориг).** $2 \times n$ хүснэгтэд баганы тоонуудын нийлбэр 1 байхаар эерэг бодит тоонууд бичигдсэн байг. Багана бүрээс тоо сонгогдсон байхаар мөр бүрийн тоонуудын нийлбэр $\frac{n+1}{4}$-ээс хэтрэхгүй байхаар тоонуудыг сонгож болно гэж батал.

**ББ-Б3 (Д.Ганзориг).** 2007 оройтой холбоост графын орой бүрийн зэрэг 93-аас багагүй бол хамгийн урт зам нь 62-оос ихгүй оройг агуулна гэж батал.

**ББ-А1.** $x, y, z$ нь харгалзан хар, цагаан, улаан ирмэгүүдийн тоо бол мод графын чанар ёсоор $x + y \geq 42, x + z \geq 42, y + z \geq 42$ болно. Эндээс $x+y+z \geq \frac{3 \cdot 42}{2} = 63$. Одоо яг 63 ирмэгтэй өгсөн нөхцөл хангах граф байгуулъя.



Үүнээс өөрийг ч байгуулж болно.

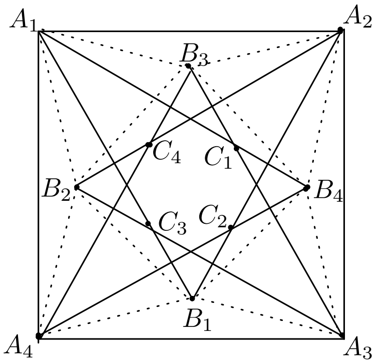
**ББ-А2.** $A_1A_2A_3A_4$ квадратын талууд дээр дотор талд нь

$$A_1A_2B_1; \quad A_2A_3B_2; \quad A_3A_4B_3; \quad A_4A_1B_4$$

зөв гурвалжнууд байгуулав. Энэ тохиолдолд

$$A_1B_3B_2; \quad A_2B_4B_3; \quad A_3B_1B_4; \quad A_4B_2B_1$$

гурвалжнууд зөв гурвалжин болохыг харуулъя.



$B_1A_2A_3$; $B_4A_4A_3$; $B_1A_1B_4$ гурвалжнууд нь харгалзан $A_2$, $A_4$, $A_1$ оройнуудад $30°$ бүхий ижил урттай хажуу талууд бүхий адил хажуут гурвалжнууд болох учир $B_1A_3$; $B_4A_3$; $B_1B_4$ суриуд нь тэнцүү байх учир $A_3B_1B_4$ зөв гурвалжин болно. Бусад гурвалжингуудын хувьд аналогоор харуулна. $B_1B_2B_3B_4$ квадрат болох нь илэрхий. Энд 8 зөв гурвалжин 2 квадрат үүснэ. $A_1A_2A_3A_4$ квадрат дээр байгуулсан дээрх 4-н цэгийг $B_1B_2B_3B_4$ квадратын дотор дээрхтэй адилаар байгуулснаар 16 зөв гурвалжин 3-н квадрат бүхий 12 цэг олдож байгаа юм.

Дашрамд дурдахад $A_1B_4$ ба $A_3B_3$; $A_2B_1$ ба $A_4B_4$; $A_3B_2$ ба $A_1B_1$; $A_4B_3$ ба $A_2B_2$ хэрчмүүдийн огтлолын цэгүүдийг харгалзан $C_1$; $C_2$; $C_3$; $C_4$ гэж тэмдэглэвэл эдгээр нь сүүлчийн байгуулагдах цэгүүдтэй давхцдаг зүй тогтолтойг мөн хялбархан харуулж болно.

**ББ-А3.** 1) $\angle BCA = \angle CAD = \angle FAG = \frac{1}{2}\overset{\smile}{GF} = \angle GEF$;

2) $\angle CAB = \angle FAE = \frac{1}{2}\overset{\smile}{EF} = \angle FGE$ болоход $\triangle\ EFG \backsim \triangle\ CBA$:

$$\frac{EF}{BC} = \frac{FG}{AB} = \frac{EG}{CA} \tag{1}$$

$AEF$-д багтсан дөрвөн өнцөгт болохоор $AG \cdot EF + AE \cdot GF = AF \cdot EG$ (1)-г ашиглахад

$$AG \cdot BC + AE \cdot AB = AF \cdot AC \tag{2}$$

$AG = AD - DG, AE = AB - BE, AF = AC - CF$ болохоор (2)-д орлуулаад эмхтгэсний дараа (Энд $BC = AD$ гэдгийг санах хэрэгтэй)
$AD^2 - AD \cdot DG + AB^2 - AB \cdot BC = AC^2 - AC \cdot CF$
$AD \cdot DG + AB \cdot BE - AC \cdot CF = AD^2 + AB^2 - AC^2$
$ABC$ гурвалжны $\angle ABC$-мохоо учраас $AD \cdot DG + AB \cdot BE - AC \cdot CF < 0$
Огтлогч, шүргэгчийн теорем ёсоор $AD \cdot DG = DD_1^2, AB \cdot BE = BB_1^2, AF \cdot AC = CC_1^2$ гэдгийг санавал $DD_1^2 + BB_1^2 - CC_1^2 < 0$
Ийнхүү $DD_1, BB_1, CC_1$ хэрчмээр гурвалжин байгуулж болдог байвал $CC_1$ талаас хүндий орших өнцөг мохоо байна.

**ББ-В1.** $s_i$, $i = \overline{1,k}$ нь $N$-ийн хэрчмүүдийн урт. Нэг үзүүр нь $s_i$-д нөгөө нь $s_j$-д орших бүх боломжит $T_{ij}$-хэрчмүүдийн олонлог авч үзье.

$\min T_{ij} = 1, \max T_{ij} = 1 + s_i + s_j$ байна. Иймд $T_{ij}$-ийн хэрчмүүдийн урт нь $s_i + s_j$ урттай хэрчимд харьяалагдана. Мөн $i$-р хэрчимд багтах $T_i$-хэрчмүүдийн олонлог нь $s_i$-урттай хэрчмийг дүүргэнэ. Иймд $\sum\limits_{1 \leq i \leq j \leq k} T_{ij} + \sum\limits_{i=1}^{k} T_i$-нь $\sum\limits_{i=1}^{k}(s_i + s_j)$-аас хэтрэхгүй. Иймд $T$-олонлогийн хэрчмүүдийн урт нь $k(s_1 + ... + s_k)$-хэтрэхгүй. нөгөө талаас нөхцөл ёсоор $T$-нь $[0,1]$-ээр бүрхэх ёстой. Эндээс $k \cdot \sum\limits_{1}^{k} s_i \geq 1 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{k} s_i \geq \frac{1}{k}$.

**ББ-В2.** Багана бүрээс хамгийн бага элементийг сонгоё (Хэрэв тэнцвэл дураар сонгоно). Энэ тохиолд багана бүрээс тоо сонгогдоно. I мөрөөс $a_1, a_2, ..., a_r$; II мөрөөс $b_1, b_2, .., b_s$ тоонууд сонгогдсон байг. $a_k \leq \frac{1}{2}$ $(k = \overline{1, r})$ ба $b_k \leq \frac{1}{2}$ $(k = \overline{1, s})$ болохыг шалгахад төвөггүй $r \leq n, s \leq n$ учраас өмнөхийг тооцвол

$$a_1 + a_2 + ... + a_r \leq \frac{n}{2} < \frac{n+1}{2}$$

$$b_1 + b_2 + ... + b_s \leq \frac{n}{2} < \frac{n+1}{2}$$

сонгогдох нөхцөл тохирч байна.▼

**ББ-В3.** Эсрэгээс нь $A$-аас $B$-д 63-аас бага орой дайрч очдог байг. $A$-тай холбогдох оройнуудыг бүлэг болгон хуваая. $A$-д 0 зам туулж очдог $A$-өөрөө. 1 нь $A$-аас шууд очдог гэх мэт $k$-нь $A$-аас яг $k - 1$ орой дайрч очдог (бага байж болохгүй). Иймд 65-аас ихгүй бүлэг үүснэ. $k = 0, 1, 2$ үед $3k, 3k + 1, 3k + 2$-д нийт 94 багагүй орой орно. $3k + 1$ бүлгийн ямар нэгэн оройгоос дор хаяж 93-ирмэг өгсөн бүлгүүдийн орой руу тардаг. Эндээс $94 \cdot 22 > 2007$ зөрчил.

## ММО-43, ДУНДЫН БАГШИЙН III ДАВАА

Ц.Дашдорж

**ДБ-А1 (Ц.Дашдорж).** $3 \leq n \in \mathbb{N}, 0 \neq a \in \mathbb{R}$ өгөгдсөн байг. $x^n + ax + 1 = 0$ тэгшитгэлийн комплекс язнуур $z$ нь $|z| \geq \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$-г хангана гэж батал.

**ДБ-А2 (Ц.Дашдорж).** $1 < n \in \mathbb{N}$ өгсөн байг. $1 \leq i \leq n$ байх $i \in \mathbb{N}$ бүрийн хувьд $a_1 + ... + a_n | a_1^i + ... + a_n^i$ байх хос хосоороо ялгаатай бөгөөд харилцан анхны байх бүх натурал $n$-үүд $(a_1, ..., a_n)$-г ол.

**ДБ-А3 (Ц.Дашдорж).** $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ бол $\sum\limits_{i,j=1}^{n} |x_i + x_j| \geq \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ гэж батал.

**ДБ-В1 (Ц.Дашдорж).** $a = 4k - 1 \in \mathbb{N}$ бол $\forall n \in \mathbb{N}$-ийн хувьд $2^{n-1} | s_n = C_n^0 - C_n^2 a + C_n^4 a^2 - C_n^6 a^3 + ...$ гэж батал.

**ДБ-В2 (Ц.Дашдорж).** $k \in \mathbb{Z}$ байг. $\{a_n\}_0^\infty$ дараалал нь $a_0 = 0, a_1 = 1, n \geq 2$ үед $a_n = 2ka_{n-1} - (k^2+1)a_{n-2}$ гэж өгөгдсөн ба $p$ нь $4m+3$ хэлбэрийн анхны тоо байг.

а) $a_{n+p^2-1} \equiv a_n (p)$

б) $a_{n+p^3-p} \equiv a_n (p^2)$ гэж батал.

**ДБ-В3 (Ц.Дашдорж).** $A_1, ..., A_{35}$ өгсөн олонлогуудын хувьд $|A_i| = 27, i = \overline{1,35}$ ба эдгээрийн аль ч гурвын огтлолцол яг нэг ерөнхий элементтэй бол $\bigcap\limits_{i=1}^{35} A_i$-хоосон биш гэж батал.

**ДБ-А1.** $z = re^{i\alpha}$, $\alpha \neq 0, \pi$ байг $r^n \cos n\alpha + ra\cos\alpha + 1 + i(r^n \sin\alpha + ra\sin\alpha) = 0$ $r^n\cos\alpha + ra\cos\alpha + 1 = 0, r^n\sin\alpha + ra\sin\alpha = 0$. I-ийг $\sin\alpha$, II-ийг $\cos\alpha$-аар үржүүлж хасвал: $r^n\sin(n-1)\alpha = \sin\alpha$,$r^n|\sin(n-1)\alpha| = |\sin\alpha|$. $\kappa \in N$ үед $|\sin k\alpha| \leq k|\sin\alpha|$-ийг индукцээр баталж болох тул $|\sin\alpha| \leq r^n(n-1)|\sin\alpha|, |z|^n = r^n \geqslant \frac{1}{n-1}$

**ДБ-А2.** $s_k = a_1^k + ... + a_n^k$ гэвэл $s_1 | s_1, s_2, ..., s_n$ байна $i > n$ бол $s_1 | s_i$ гэж батлая. МК II,хуудас 93-ын (8')-д $k = n+1, n+2, ...$ гэх,мэт дараалан тавих замаар $k > n$ бол $s_1 | s_k$ болох нь гарна. Үүгээр

$$\forall m, s_1 | s_m \tag{1}$$

$p^k | s_1$ байг $k < m$ ба $\varphi(p^k) | m$ бол 1-ээр

$$p^k / s_m \tag{2}$$

Хэрэв $\exists a_i, p | a_i$ бол $p^k | a_i^m$

Иймд Эйлерийн теоромоор $s_m \equiv n \bigvee n-1(p^k)$
Эндээс 2-оор $n \equiv 0(p^k)$эсвэл $n-1 \equiv 0(p^k)$

Үүгээр $n(n-1) \equiv 0(s_1)$. Эндээс

$$s_1|n(n-1) \tag{3}$$

$s_1$ нь эхний $n-1$ анхны тооны нийлбэр дээр 1-ийг нэмснээс багагүй $n > 5$ бол $s_1 \geq 1+2+3+5+7+11+13+15+17+...+(2n-1)$, энд 9 ороогүй Ийнхүү $s_1 \geqslant n^2-9+2 = n^2-7$ ба $n > 7$ бол $s_1 \geqslant n^2-7 > n^2-n = n(n-1) \geqslant s_1$ буюу энэ үед зөрчилд хүрнэ. $n = 4, 6$ үед эхний $n-1$ анхны тооны нийлбэр дээр 1-ийг нэмбэл $n(n-1)-1$ болно. Энэ тоо мөн (3)-тай зөрчилдөнө, гэх мэт үлдэх тохиолдлууд (3)-д зөрчилдөхийг шалгана.

**ДБ-А3.** $f(x_1,...,x_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} |x_i + x_j|, g(x_1,...,x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ гэе . Эерэг $x_i$-үүдийг тэдгээрийн арифметик дунджаар сольвол $f$-д өсөхгүй гэдгийг харуулая. Ингэснээр $g$ үл өөрчлөгдөх нь тодорхой

$x_1,...,x_k > 0$ гэж үзье. Тэгвэл $\sum\limits_{i,j=1}^{k} |x_i + x_j|$мөн үл өөрчлөгдөнө. $i > k$ байг. $f_i(x_1,...,x_k) = \sum_{j=1}^{k} |x_i + x_j|$ гэе. $|x_i + x|$ хотгор функц тул $x_1,...,x_k$-үүдийн арифметик дунджаар нь сольвол Йенсений тэнцэл бишээр $\sum_{j=1}^{k} |x_i + x_j|$ мөн өсөхгүй.

$$f = \sum_{i,j=1}^{k} |x_i + x_j| + \sum_{i,j=k+1}^{n} |x_i + x_j| + 2\sum_{i=k+1}^{n} f_i(x_1,...,x_k)$$

тул $f$ өсөхгүй байна. Сөрөг $x_i$-үүдийн хувьд мөн ийм зүйлийг хэлж чадна. Иймд $x_1 = x_2 = ... = x_k = -a$, $x_k + 1 = ... = x_n = b$ $a, b > 0$ гэж үзэж чадна. Тэгвэл $2k^2a + 2(n-k)^2b + 2k(n-k)|a-b| \geq kna + (n-k)nb$ гэж батлах хэрэгтэй.
$a \geq b$ гэж үзвэл $(2k^2+2k(n-k)-kn)a+(2(n-k)^2-2k(n-k)-(n-k)n)b \geq 0$, $kna + (n^2+4k^2-5nk)b \geq 0$ гэж батлах хэрэгтэй болов. $a \geqslant 6$ тул $kna + (n^2+4k^2-5nk)b \geq (kn+n^2+4k^2-5nk)b = (n-2k)^2b \geq 0$

**ДБ-В1.**

$$(1+i\sqrt{a})^n = s_n + i\sqrt{a}t_n \tag{1}$$

$$(1-i\sqrt{a}^n = s_n - i\sqrt{a}t_n) \tag{2}$$

$$s_n = \frac{1}{2}[(1+i\sqrt{a})^n + (1-i\sqrt{a})^n] \tag{3}$$

$z_1 = 1+i\sqrt{a}$, $z_2 = 1-i\sqrt{a}$ язгууртай квадрат тэгштгэл нь $z^2-2z+(a+1)=0$ тул

$$s_{n+2} = 2s_{n+1} - (1+a)s_n \tag{4}$$

(3)-аас $s_1 = 1, s_2 = 1-a = 2-4k = 2(1-2k)$ тул $n = 1,2$ үед $(*)$ биелэгдэв. $2^{n-1}|s_n$ ба $2^n|s_{n+1}$ гэвэл $1+a = 4k$ ба $2^{n+1}|(1+a)s_n$ тул (4)-өөс $2^{n+1}|s_{n+2}$ гэж гарна.

**ДБ-B2.** 1). §10,11 Теором 2-оор $p$ нь энгийн $G$ тоо болно. $p \nmid k+i$, $p \nmid k-i$ байх нь илэрхий. §10.17-9-өөр $\mathbb{Z}p[i]^*$ $\mathbb{Z}p[i] \setminus \{0\}$ буюу $|\mathbb{Z}p[i]^*| = p^2-1$ болно. Иймд $\alpha \in \mathbb{Z}[i]^*$ бол $\alpha^{p^2-1} \equiv 1(p)$ болно. $((\mathbb{Z}_p[i]^*, \cdot)$ бүлэгт Лагранжийн теоромыг хэрэглэв). Нөгөө талаас $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$, $A, B \in \mathbb{Z}p[i]$, $\alpha, \beta$ нь $x^2-2kx+k^2+1 = 0$ тэгштгэлийг язгуур буюу $\{\alpha, \beta\} = \{k+i, k-i\}$ Иймд $a_{n+p^2-1} = A\alpha^{n+p^2-1} + B\beta^{n+p^2-1} \equiv A\alpha^n + B\beta^n \equiv a_n$ (mod $p$)

2). $(a,p) = 1$ бол$\alpha^{p^3-p} \equiv 1 \pmod{p^2}$: 1)-ээр $\alpha^{p^2-1} \equiv 1(p)$ тул 1.6-4а-аар $\alpha^{p^3-p} \equiv 1(p^2)$ болно.

Иймд $a_{n+p^3-p} \equiv A\alpha^{n+p^3-p} + B\beta^{n+p^3-p} \equiv A\alpha^n + B\beta^n \equiv a_n(p^2)$

**ДБ-B3.** Лемм. 8-аас цөөнгүй $A_i$-ийн огтлолцолд орох $\alpha$ элемент олдоно.

$C_i = A_i \cap A_{35}$, $1 \le i \le 34$ гэвэл $|C_i \cap C_i| = |A_i \cap A_{35} \cap A_j| = 1$, $i \neq j$. $C_i \cap C_j = \{x_{ij}\}$-ийн тоо $C_{34}^2$ ба $x_{ij}$ элементүүдийн тоо $|A_{35}| = 27$-оос үл хэтэрнэ.

Иймд $\exists \alpha \ni A_{35}$, $\alpha$ элемент $\lceil C_{34}^2/27 \rceil = 21$-ширхэг $C_i \cap C_j$-д орно. $C_7^2 = 21$ тул $\alpha$ элемент хамгийн цөөндөө 7 $C_i$-д орно. $\alpha \in A_{35}$ тул $\alpha$ элемент 8 $A_i$-д орох болов. Лемма батлагдлаа. $\alpha \in A_1, ..., A_r$, $\alpha \notin A_{r+1}, ..., A_n$ $35 > r \ge 8$ гэж үзье. $1 \le i < j \le r$ байх $i, j$-ийн хувьд $B_{ij} = A_i \cap A_j \cap A_{r+1}$ гэе. $B_{ij}$ бүр ганц элементтэй ба $B_{ij}$-ийн тоо $C_8^2 = 28$-аас цөөнгүй ба $|A_{r+1}| = 27$ тул $B_{ij}$-үүдийн 2нь давхцана, тэр нь $B_{pq} = B_{rs} = \{b\}$ гэвэл $|\{p,q,r,s\}| \ge 3$ ба $b \in A_p, A_q, A_r, A_s, A_{r+1} \longrightarrow \alpha = b \in A_{r+1}$ болж $\alpha \notin A_{r+1}$-д зөрчив.

# ММО-43, Дундын багшийн IV даваа

Ц.Дашдорж

**ДБ-А1 (Ц.Батхүү).** Элементүүдийнх нь нийлбэр 5-д хуваагддаг $\{1, 2, ..., 5n\}$ олонлогийн дэд олонлогуудын тоог ол.

**ДБ-А2 (Д.Батнасан).** Шулуун дээр дурын байршилтай 101ш хэрчим өгөв. Эсвэл ерөнхий цэгтэй 11 хэрчим, эсвэл аль ч 2-нь үл огтолцох 11 хэрчим олдохыг батал.

**ДБ-А3 (А.Ганбат).** $p$ сондгой анхны тоо. $g$-нь түүний анхны язгуур байг. $A = \{k^2 + 1|1 \leq k \leq \dfrac{p-1}{2}\}$ ба $B = \{g^m|1 \leq m \leq \dfrac{p-1}{2}\}$ олонлогууд $p$ модулиар тэнцүү байх бүх $p$-г ол.

**ДБ-В1 (Ц.Дашдорж).** $x, y, z \in \mathbb{N}, xy = z^2 + 1$ бол $\exists a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $x = a^2 + b^2, y = c^2 + d^2, z = ac + bd$ гэж батал.

**ДБ-В2 (А.Хашбаатар).** $ABC$ зөв гурвалжныг багтаасан тойрог дотор дурын $P$ цэг авав. $PA, PB, PC$ хэрчмүүдээр гурвалжин байгуулж болохыг батал. Хэрэв тойргийн радиус $R, P$ цэгээс тойргийн төв хүртлэх зай $d$ бол байгуулсан гурвалжны талбайг ол.

**ДБ-В3 (Г.Батзаяа).** $n = p_1^{\alpha_1}...p_s^{\alpha_s} \geq 2$ байг. Хэрэв $\alpha \in \mathbb{N}$-ийн хувьд $p_i - 1 \nmid \alpha, i = \overline{1, s}$ байдаг бол $n \mid \sum\limits_{a \in \mathbb{Z}_n^*} a^\alpha$ гэж батал.

**ДБ-А1.** $f(x) = (1 + x)(1 + x^2)...(1 + x^{5n})$ олон гишүүнт авч үзвэл түүний $x^{a_1}x^{a_2}...x^{a_m}$ гишүүнт бүрт $\{1, 2, ..., 5n\}$ олонлогийн $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$ дэд олонлогийг харилцан нэг утгатайгаар харгалзуулж болно. Иймд бид $k$ эерэг тохиолдолд $f(x)$ олон гишүүнтийн $x^{5k}$ хэлбэртэй гишүүдийн өмнөх коэффициентуудын нийлбэр $S$-ийг олоход хангалттай.

$\xi = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ нь нэгжийн 5 зэргийн язгуур болог▸. Тэгвэл $\xi^5 = 1$ ба $1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4 = 1$ тул

$$S = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} f(\xi^j)$$

Нөгөө талаас $\xi, \xi^2, \xi^3, \xi^4, \xi^5 = 1$ нь $g(x) = x^5 - 1$ олон гишүүнтийн язгуур буюу

$$g(x) = x^5 - 1 = (x - \xi)(x - \xi^2)(x - \xi^3)(x - \xi^4)(x - \xi^5)$$

$$g(-1) = -2 = (-1 - \xi)(-1 - \xi^2)(-1 - \xi^3)(-1 - \xi^4)(-1 - \xi^5).$$

Эндээс

$$(1 + \xi)(1 + \xi^2)(1 + \xi^3)(1 + \xi^4)(1 + \xi^5) = 2$$

тул $f(\xi) = 2^n$ ба $j = 2, 3, 4$ тоонуудын хувьд ч мөн $f(\xi^j) = 2^n$ ба $f(\xi^5) = f(1) = 2^{5n}$. Иймд

$$S = \frac{1}{5}(4 \cdot 2^n + 2^{5n}) = \frac{1}{5}(2^{n+2} + 2^{5n}).$$

**ДБ-А2.** Хэрчим бүрийн хувьд түүнтэй үл огтолцох, зүүн талд нь орших, хоорондоо үл огтолцох хамгийн олон тоотой олдох хэрчмүүдийн тоог $k-1$ гэвэл, тухайн хэрчимд $k$ гэсэн жин харгалзуулъя. $k \geq 11$ бол үл огтолцох 11 хэрчим олдоход хүрнэ. Иймд хэрчим бүрийн жин нь 10 хэтрэхгүй ($k \leq 10$) байг. 101 хэрчим байгаа тул Дрихлейн зарчмаар ижил жинтэй 11 хэрчим олдоно. Ижил жинтэй 2 хэрчим ерөнхий цэгтэй. Хэрэв тийм биш бол аль нэг нь нөгөөгийнхөө баруун талд оршиж, түүний жин нь нөгөөгийхөөсөө их болоход хүрнэ.

**Лемм.** Шулуун дээр орших аль ч 2 нь ерөнхий цэгтэй хэрчмүүд бүгд ерөнхий цэгтэй.
Хэрчмүүдийн зүүн талын төгсгөлүүдийн хамгийн ихийг авч үзэхэд лемм батлагдана.
Иймд дээр олдох ижил жинтэй паралель хэрчим ерөнхий цэгтэй боллоо.

**ДБ-А3.** $K = \prod\limits_{a \in A} a, \quad P = \prod\limits_{b \in B} b$ гэе.

$p = 3$ үед $A = B$ байна.

$p > 3$ гэе. Хэрэв $A = B$ бол $K = P$ байна. $\Rightarrow K^2 = P^2$ байх ёстой. $g$-анхны язгуур $\Rightarrow g^{p-1} \equiv 1(p) \Rightarrow g^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(p)$ байна.

$$P^2 = \left( \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} g^k \right)^2 = \left( g^{1+2+\ldots+\frac{p-1}{2}} \right)^2 = g^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}}(p)$$

байна. $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} p \equiv 1(4) \quad \text{үед} & p^2 \equiv -1(p) \\ p \equiv 3(4) \quad \text{үед} & p^2 \equiv 1(p) \end{array} \right.$ байна.
$k^2$-г олъё. $\forall k : k^2 + 1 \equiv (p-k)^2 + 1 \pmod{p}$ ба $p^2 + 1 \equiv 1(p)$ тул $k^2 \equiv \prod\limits_{k+1}^{p} (k^2 + 1) \pmod{p}$ байна. $k_p$-талбар авч үзье:
$G = \{k_1 + k_2 i | k_1, k_2 \in k_p\}$ гэе. $\Rightarrow G$ нь талбар байна. $G$-дээр $P(x) = \prod\limits_{k=1}^{p} (x + k)$ олон гишүүнт авч үзье. $P(x) \equiv x^p - x$ гэж баталъя.
$x = 0$ үед $P(x) \equiv 0 \equiv 0^p - 0$.
$x \neq 0$ үед $x^{p-1} \equiv 1 \Rightarrow x^p - x \equiv 0$ ба $P(x) \equiv 0(p)$ байх нь тодорхой.
Иймд $1, 2, ..., p$ нь $P(x) - x^p + x$ олон гишүүнтийн язгуур болох ба $\deg(P(x) - x^p + x) < p$ тул $P(x) \equiv x^p - x$. Иймд $k^2 = \prod\limits_{1}^{p}(k^2 + 1) =$

$\prod\limits_{1}^{p}(k+i)(k-i) = \prod\limits_{k=1}^{p}(k+i)\cdot\prod\limits_{k=1}^{p}(k+i) \equiv P(i)\cdot P(-i) \equiv (i^p-i)((-i)^p+i) \equiv -(i^p-i)^2 \pmod p$ байна.

$\Rightarrow \begin{cases} p\equiv 1(4) & \text{үед} \quad k^2\equiv 0(p) \\ p\equiv 3(4) & \text{үед} \quad k^2\equiv 4(p) \end{cases}$ Иймд $k^2 \not\equiv p^2(p)$ буюу $p>3$ үед $A \neq B \Rightarrow p=\{3\}$.

**ДБ-В1.** Гауссын цагираг $G=\mathbb{Z}[i]$-д авч үзье. Гауссын анхны too $\pi/xy = z^2+1$ бол $\pi/x \bigvee \pi/y$ байна. $\pi/x$ бол $\overline{\pi}/\overline{x}=x$ буюу $N(\pi)=\pi\overline{\pi}/x$ болно. $N(\pi)=2\bigvee p=4k+1\bigvee p^2=4k+3$ (MKII, х.47-48) ба $p=4k+3\nmid z^2+1$ (MKI, х. ) тул $N(\pi)=2\bigvee p=4k+1$ л байна.
Иймд $\exists\alpha\in\mathbb{Z}[a_i], x=N(\alpha)=a^2+b^2$ болно. Мөн адилаар $y=N(\beta)=c^2+d^2=N(c+d_i)=N(c-d_i)$ энд $a,b,c,d\in\mathbb{Z}.xy=N(\alpha)N(\beta)=N(\alpha\beta)=z^2+1=N(z+i)$. энд $\alpha\beta=z+i$ гэж авч болох тул $z=Re(a+b_i)(c-d_i)=ac+bd$ болно.
**Тэмдэглэл.** Энэ бодолт нь $x_1...x_k=y^2+z^2$ байх натурал тоонуудын хувьд ч тохирно, өөрөөр хэлбэл тэдгээр нь $x_i=a_i^2+b_i^2,\ i=\overline{1,k}, y=c^2+d^2, z=m^2+n^2$ хэлбэртэй л байна.

**ДБ-В2.** Зөв $ABC$ гурвалжин багтаасан тойрог татаж өгсөн $P$ болон $ABC$ гурвалжингаар $60^circ$ өнцгөөр $C$ оройг тойруулан эргүүлэхэд $P$ цэг $P'$ цэгт , харин $B$ оройг $B'$ цэгт буусан бол $A$ орой нь $B$ оройтой давхцана. Ингэхэд $PA=P'A'=P'B$ болно. $CPP'$ зөв гурвалжин болох учраас $CP=PP'$ ингэхээр $PBP'$ гурвалжны талууд нь $PC, PA, PB$ байна.

Одоо энэ гурвалжны талбайг $OP=d$ болон тойргийн $R$ радиусаар илэрхийлье.

Тойргийн төв нь $ABC$ гурвалжны хүндийн төв байгаа болохоор Лейбницийн теоремоор

$$PA^2+PB^2+PC^2=a^2+3d^2 \tag{1}$$

$ABC$ гурвалжны талын урт товчлохын тулд $PA=k, PB=\ell, PC=m$ гэхэд Героны томъёогоор, олох талббайг $S$ гэвэл

$$16S_1=(k+\ell+m)(k+\ell-m)(k-\ell+m)(-k+\ell+m)=$$
$$=2k^2\ell^2+2\ell^2k^2+2m^2k^2-k^4-\ell^4-m^4 \tag{2}$$

$\angle PAC=\alpha, \angle PAB=\beta$ гэвэл ерөнхийдөө $\alpha\pm\beta=60^\circ$ байх бөгөөд манай тохиолдолд $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}$ буюу $\cos\alpha\cos\beta-\dfrac{1}{2}=\sin\alpha\sin\beta$
Квадрат зэрэгт дэвшүүлээд хувиргахад $\cos^2\alpha\cos^2\beta+\cos\alpha\cos\beta+\dfrac{1}{4}=$

$1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$ $PAC, PAB$ хоёр гурвалжнаас $\cos\alpha = \dfrac{a^2+k^2-m^2}{2ak}, \cos\beta = \dfrac{a^2+k^2-\ell^2}{2ak}$ тул өмнөх тэнцлэд орлуулаад эмхтгэсний дараа

$$a^4+k^4+\ell^4+m^4 = a^2(k^2+\ell^2+m^2)+k^2\ell^2+\ell^2m^2+m^2k^2 \qquad (3)$$

(1),(2),(3) тэнцлүүдээс $9d^2-6a^2d^2-48S_1^2+a^4=0$ гэж гарах учраас $(a^2-3d^2)^2=48S_1^2$ буюу $d=3, R=5$ гэснээр $a=\sqrt{3}\ell$ байдгийг санавал $S_1=4\sqrt{3}$ кв.нэгж болно.

**ДБ-В3.** Эхлээд

$$\begin{cases} (n, N^\alpha-1)=1 \\ (n, N)=1 \end{cases} \qquad (1)$$

байх $N$ тоог байгуулая. $M=p_1...p_s$ гээд $N=\sum\limits_{j=1}^{s} g_i\Big(\dfrac{M}{p_j}\Big)^{p_j-1}$ гэе. Энд $g_j$ нь $p_j$-ийн анхны язгуур. Тэгвэл $N\equiv g_j\Big(\dfrac{M}{p_j}\Big)^{p_j-1}\equiv g_j(p_j)$ ба $N^\alpha-1\equiv g_j^\alpha-1(p_j)$ байна.

Хэрэв $1<(n,N^\alpha-1)$ бол $\exists p_j : 0\equiv N^\alpha-1\equiv g_j^\alpha-1(p_j)\Rightarrow p_j-1|\alpha$ зөрчил. $\Rightarrow n \mid \Big(\sum\limits_{a\in\mathbb{Z}_n^*} a^\alpha\Big)(N^\alpha-1)$ гэж батлахад хангалттай

$$0\equiv \sum_{a\in\mathbb{Z}_n^*}(aN)^\alpha-\sum_{a\in\mathbb{Z}_n^*}a^\alpha=(N^\alpha-1)\Big(\sum_{a\in\mathbb{Z}_n^*}a^\alpha\Big)\equiv 0(n)$$

# ОУМО-48-ийн сорил 1

Б.Сандагдорж(МУБИС)

**1 (Ч.Гантөмөр).** $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ бол

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}} \geq \sqrt{6 \cdot \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}}$$

тэнцэл биш биелэхийг батал.

**2 (Б.Сандагдорж).** $\sin\alpha = \dfrac{29}{1997}$ байг. $1997^{43} \cdot \sin 43\alpha$ тоо бүхэл болохыг баталж, 5-д хуваахад гарах үлдэгдлийг ол.

**3 (Б.Баясгалан).** $P_1, P_2, ..., P_n$-хавтгайн цэгүүд.

1) Ямар нэг $P_i$-ийн хувьд $P_iP_j, i \neq j$ зайнууд нь дор хаяж $\sqrt{n - \dfrac{3}{4}} - \dfrac{1}{2}$ ялгаатай утгатай байхыг батал.

2) Минималь зай хамгийн олондоо хэдэн удаа үүсэх вэ?

**1.** (Олонлог төв сургууль IX ангийн сурагч Э.Энхзаяа, Хөвсгөл XI анги Б.Цэнд-Аюуш нарын бодолт )

$$A = \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}} = \Big(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} +$$
$$+ 2\sqrt{\frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b}} + 2\sqrt{\frac{b+c}{a} \cdot \frac{a+b}{c}} + 2\sqrt{\frac{a+b}{c} \cdot \frac{c+a}{b}}\Big)^{\frac{1}{2}}$$ гэе.

Кошийн тэнцэл биш хэрэглэвэл

$$2\sqrt{\frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b}} = 2\sqrt{\frac{b+c}{b} \cdot \frac{c+a}{a}} = 2\sqrt{\big(1 + \frac{c}{b}\big)\big(1 + \frac{c}{a}\big)} \geq$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{4c}{\sqrt{ab}}} = 4\frac{c^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}$$

болно.Үүнтэй адилаар

$$2\sqrt{\frac{b+c}{a} \cdot \frac{a+b}{c}} \geq 4\frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{4}}},\ 2\sqrt{\frac{a+b}{c} \cdot \frac{c+a}{b}} \geq 4\frac{a^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}$$

болно.

$$A \geq \Big(\big(\frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{4c^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}\big) + \big(\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{4b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{4}}}\big) + \big(\frac{a}{c} + \frac{a}{b} + \frac{4a^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}\big)\Big)^{\frac{1}{2}} = B$$

ба

$$\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{4c^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}=\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{c^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}+\frac{c^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}+\frac{c^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}+\frac{c^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}\geq$$

$$\geq 6\cdot\sqrt[6]{\frac{c^{\frac{1}{2}\cdot 4}c^2}{a^{\frac{1}{4}\cdot 4}\cdot a\cdot b^{\frac{1}{4}\cdot 4}\cdot b}}=6\frac{c^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}=6\frac{c}{\sqrt[3]{abc}}$$

гэдгийг харвал

$$A\geq B\geq\left(6\frac{a}{\sqrt[3]{abc}}+6\frac{b}{\sqrt[3]{abc}}+6\frac{c}{\sqrt[3]{abc}}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{6\cdot\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}}$$

болж батлах зүйл гарна. Кошийн тэнцэл бишийн тэнцэлдээ хүрэх нөхцөлийг санавал өгөгдсөн тэнцэл биш тэнцэлдээ $a=b=c$ үед хүрнэ.

**2.** $1997^n\cdot\sin n\alpha=p_n; 1997^n\cdot\cos n\alpha=b_n$ гэж тэмдэглэе. Нөхцөлөөр $p_1=29, b_1=\pm\sqrt{3987168}$ гэж гарна. $\sin(n+1)\alpha=\sin\alpha\cdot\cos n\alpha+\cos\alpha\cdot\sin n\alpha, \cos(n+1)\alpha=\cos\alpha\cdot\cos n\alpha-\sin\alpha\cdot\sin n\alpha$ адилтгалаас

$$a_{n+1}=a_1b_n+b_1a_n \tag{1}$$

$$b_{n+1}=b_1b_n-a_1a_n \tag{2}$$

гэж гарна (1)-ээс $b_n=\dfrac{a_{n+1}-b_1a_n}{a_1}$ гэж олдох түүнийг (2)-д оруулбал

$$\frac{a_{n+2}-b_1a_{n+1}}{a_1}=b_1\cdot\frac{a_{n+1}-b_1a_n}{a_1}-a_1a_n\Rightarrow$$

$a_{n+2}-b_1a_{n+1}=b_1a_{n+1}-b_1^2a_n-a_1^2a_n\Leftrightarrow a_{n+2}=2b_1a_{n+1}-(b_1^2+a_1^2)a_n(*)$ гэж гарна. $(*)$-оос $a_{2n+1}=2b_1a_{2n}-1997^2\cdot a_{2n-1}$ буюу

$$2b_1a_{2n}=a_{2n+1}+1997^2\cdot a_{2n-1}eqno(**)$$

байна. Мөн $(*)$-оос

$$a_{2n+2}=2b_1a_{2n+1}-1997^2a_{2n}$$

гэж гарах ба үүнийг $2b_1$-ээр үржүүлбэл

$$2b_1a_{2n+2}=4b_1^2a_{2n+1}-1997^22b_1a_{2n}$$

буюу $(**)$-ийг ашиглавал

$$a_{2n+3}+1997^2\cdot a_{2n+1}=4b_1^2\cdot a_{2n+1}-1997^2a_{2n+1}-1997^4a_{2n-1}$$

болно. Эндээс

$$a_{2n+3} = 2(1997^2 - 2 \cdot 29^2)a_{2n+1} - 1997^4 a_{2n-1}$$

байна.

$$a_1 = 29; a_3 = 1997^3 \cdot \sin 3\alpha = 1997^3 \cdot (3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)$$

буюу $a_3$-бүхэл тоо болно. Иймээс $n$-сондгой үед $a_n$-нь бүхэл тоо болно. Нөгөө талаас $a_1 \equiv -1(5), a_3 = 2(5)$ буюу рекуррент дарааллаас $a_{2n+3} \equiv -(a_{2n+1} + a_{2n-1})(mod 5)$ гэж гарна. Иймд $a_1, a_3, a_5, ...$ дарааллыг 5-аар жишихэд $-1, 2, -1, -1, 2, -1, ...$ буюу 3-аар үелэнэ. Эндээс $a_{43} \equiv -1(5)$ байна.

**3.** 1) $m$-ямар нэг цэгээс бусад цэг хүртлэх ялгаатай зайнуудын максималь тоо байг.
$P_\ell$-хамгийн зүүн захын цэг байг.
$S$- $P_\ell$ цэгээс бусад цэг хүртлэх ялгаатай ялгаатай зайнуудын тоо
$t$- $P_\ell$ цэгээс ижил зайд орших цэгүүдийн максималь тоо
$\max|\tau_i| = t$. Тэгвэл $s \cdot t \geq n-1, m \geq s$ байна. Мөн $m \geq t-1$. Учир нь $P_\ell$-ээс ижил зайд орших $t$ цэг нь тал тойрог дээр байрлах бөгөөд уг тал тойргийн хамгийн захын цэгээс бусад цэг хүртлэх зайнууд бүгд ялгаатай байна. Тийм учраас $m(m+1) \geq n-1$ болж батлагдана.

2) Хэрэв цэгүүд хамгийн бага зайтай бол хооронд нь хэрчмээр холбоё. Тэгвэл эдгээр хэрчмүүд өөр хоорондоо үл огтлолцоно. Иймд $n$ оройтой хавтгай граф үүснэ. Ирмэгийн тоо хамгийн олондоо $3n-6$ байна.

$*$. Ер нь энэ нь Эрдешийн 1946 онд баталсан хэцүү үр дүнгүүдийн энгийн хэлбэр нь юм. Тэрээр энэ зайн тоо $3n - c\sqrt{n}, c > 0$ тогтмол гэж баталжээ.

# ОУМО-48, II сорил

Б.Сандагдорж(МУБИС)

**1 (Б.Баясгалан).** Талуудын харьцаа $\sqrt{13}$ байх тэгш өнцөгт өгөгдөв. Уг тэгш өнцөгтөөс квадратыг тасалж тэгш өнцөгт үлдээв. Энэ үйлдлийг олон удаа давтав. Үүсэх тэгш өнцөгтүүдийн талуудын харьцааны дараалал үелэхийг батал.

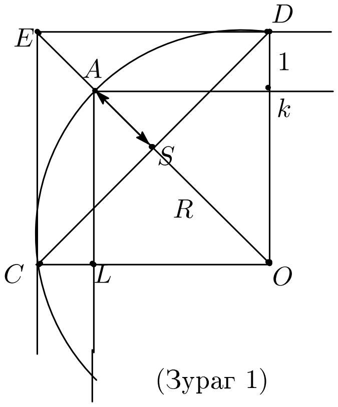
**2 (Н.Дайвий-Од).** Нэгж өргөнтэй тэгш өнцөг үүсгэсэн коридорт $d$ диаметртэй муруй багтан эргэж чаддаг байв. $d$-ийн хамгийн их утгыг ол. (муруйн хамгийн хол орших хоёр цэгийн хоорондох зайг диаметр гэнэ) Муруйн зузааныг тооцохгүй бөгөөд муруйн хэлбэр дүрсээ өөрчлөхгүйгээр хавтгайгаараа коридорт өнцөгтэй хэсгээр нэвтрэн гарах боломжтой байхыг байхаар багтан эргэж чаддаг гэнэ.

**3 (Б.Хоролдагва).** $ABC(AB \neq BC)$ гурвалжны $BH$ өндрөөр диаметрээ хийсэн тойрог $AB, BC$ талуудыг харгалзан $M, N$ цэгүүдэд огтолно. $M, N$ цэгүүдэд татсан тойргийн шүргэгчүүд $O$ цэгт огтлолцох бөгөөд $(BO)$ шулуун $AC$ талыг $E$ цэгт огтолно. $(BO)$ шулуун дээр $\vec{BE} = \vec{EK}$ байх $K$ цэгийг тэмдэглэв.

Хэрэв $AM, MN, NC, CK, KA$ хэрчимүүдийн дунджууд харгалзан $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$ бол $(T_1T_4), (T_2K), (T_3T_5)$ шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

**1.** Хялбар тооцоо хийж талуудын харьцааны дараалал 10-аар үелэхийг хялбар харуулж болно. Энэ бологыг ерөнхий тохиолдолд өөрөөр хэлбэл $\sqrt{n}$, $n$-нь квадратан чөлөөт үед бодох нь сонирхолтой юм.

**2.** ▲

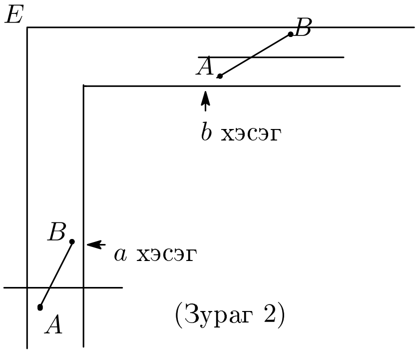


(Зураг 1)

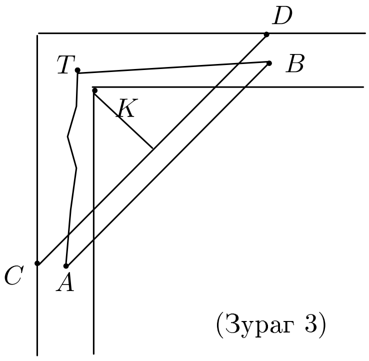
а) $2+\sqrt{2}$ диаметртэй авлаа коридороор саалгүй эргэдэг муруй олдохыг харуулъя. (1-р зураг) Коридорын өнцгийн дотор орой $A$-г шүргэдэг мөн гадна талуудыг $C, D$ цэгүүдэд шүргэх тойргийн $\widehat{CD}$ нум нь энэ өнцгөөр чөлөөтэй эргэх бөгөөд энэ нумын диаметр нь $CD$ хэрчмийн урттай тэнцэнэ. $AKOL$ квадрат ба түүний диагогал $R$ учир $KO = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$,

нөгөө талаас $DO = R = \frac{R}{\sqrt{2}} + 1$ учир $R = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$; $EDOC$ квадрат учир $CD = \sqrt{2}R = \sqrt{2}\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}-1} = 2 + 2\sqrt{2}$ болно.
Нөгөө талаас $ES = CD : 2 = 1 + \sqrt{2}; AE = \sqrt{2}$ учир $AS = 1$ болж муруйн "өргөн" нь коридорын хананд багтах нь харагдлаа. Иймд $\widehat{CD}$ муруй энэ коридороор чөлөөтэй эргэж багтана.

б) Одоо $d > 2 + 2\sqrt{2}$ байх диаметртэй ямар ч муруй коридорт эргэхгүй гэж харуулая. Аливаа муруй нь хэдэн ч диаметртэй байж болно гэдгийг анзаараад уул муруйн аль нэг $d$ диаметрийг үүсгэж байгаа $A, B$ цэгүүдийг сонирхоё.



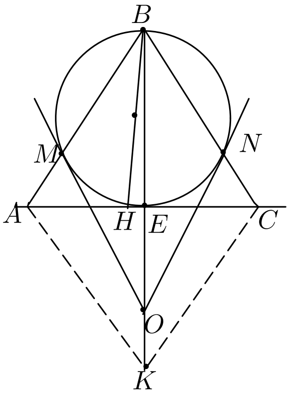
(Зураг 2)

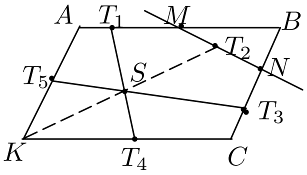


(Зураг 3)

Нэгэнт $AB = d > 2 + 2\sqrt{2}$ учир а)-хэсэгт байрлахдаа $AB$ хэрчимийн $L$ шулуунтай үүсгэх өнцөг 45°-аас бага, эргэлтийн хөдөлгөөн тасралтгүй учир $AB$ хэрчим $KL$-тэй 45° өнцөг үүсгэх эгшин олдоно. (зураг 2) Энэ үед (зураг 3) коридороос 1 зайд орших $KL$-д 45° өнцөг үүсэх $CD$ хэрчмийн урт $2 + 2\sqrt{2}$ байдгийг а)-хэсэгт харуулсан учир $AB$ хэрчим нь $CD$ хэрчмээс "доош" оршихоос өөр аргагүй. Гэтэл $A, B$-цэгийг агуулсан муруй нь коридорт багтаж байх ёстой учир түүнд $K$ цэгээс "дээш" байх ямар нэг $T$ цэг олдох ба энэ үед $A; T; B$ цэгүүдийг агуулсан муруйн "өргөн" 1-ээс их учир энэ нь коридорын шулуун хэсэгт багтахгүй. ▼

**3.**





$BH$ диаметртэй тойргийг $\omega_1, O$ цэгт төвтэй $OM = ON$ радиустай тойргийг $\omega_2$ гэж тэмдэглье. $B$ цэгт төвтэй $|BH|$ радиустай тойргийн хувь дахь инверсээр $\omega_1$ тойрог $(AC)$ шулуунд, $\omega_2$ тойрог $|AC|$ диаметртэй тойрогт буна. Иймд $(OB) \cap (AC) = E$ цэг $|AC|$ хэрчмийн дундаж цэг болох тул $ABCX$ нь паралелограмм болно. Одоо $HABC$ паралелограммын хувьд $M$ ба $N$ нь $AB, BC$ талууд дээр орших цэгүүд бол бодлогоо бодъё.

$R = (K, CA)$ аффин координатын систем сонгон авбал $K(0,0), C(1,0), A(0,1), B(1,1)$ байна. $M(\alpha, 1), N(1, \beta)$ гэвэл $T_1\Big(\dfrac{\alpha}{2}, 1\Big),\ T_2\Big(\dfrac{\alpha+1}{2}, \dfrac{\beta+1}{2}\Big)$, $T_3\Big(1, \dfrac{\beta}{2}\Big),\ T_4\Big(\dfrac{1}{2}, 0\Big),\ T_5\Big(0, \dfrac{1}{2}\Big)$ болно. $(T_1T_4)$ ба $(T_3T_5)$ шулуунуудын тэгшитгэл нь харгалзан $2x - (\alpha-1)y - 1 = 0$ ба $(\beta-1)x - 2y + 1 = 0$. Эндээс $x = \dfrac{2y-1}{\beta-1}$ ба $y = \dfrac{\beta+1}{4-(\alpha-1)(\beta-1)}$ гэж гарна.

Нөгөө талаас $(KT_2)$ шулууны тэг нь $\dfrac{\beta+1}{2}x = \dfrac{\alpha+1}{2}y$ бөгөөд энэ тэгшитгэлийг $(T_1T_4) \cap (T_3T_5) = S\Big(\dfrac{2y-1}{\beta-1}, \dfrac{\beta+1}{4-(\alpha-1)(\beta-1)}\Big)$ цэгийн координат хангахыг хялбархан шалнаж болно. Иймд $(T_1T_4), (T_3T_5), (KT_2)$ шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно.

# ОУМО-48, III СОРИЛ

Ц.Дашдорж

**1 (Б.Санчир).** Эерэг $a_i, w_i$ тоонуудын хувьд жинтэй $r \in \mathbb{R}$ зэрэгт дундаж гэдгийг

$$M_n^{[r]}(a;w) := \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i a_i^r}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i}\right)^{\frac{1}{r}}$$

-ээр тэмдэглэе.
*$r \geq s \geq 1$ гэсэн нөхцлийг хангах тоонуудын хувьд*

1.)

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i a_i^r}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i a_i^s}\right)^{\frac{1}{r-s}} \geq M_n^{[1]}(a;w) \qquad (1)$$

2.)

$$\left(\frac{M_n^{[r]}(a;w)}{M_n^{[0]}(a;w)}\right)^r + \left(\frac{M_n^{[0]}(a;w)}{M_n^{[s]}(a;w)}\right)^s \geq 2 \qquad (2)$$

*тэнцэтгэл бишүүд тус тус биелнэ гэж батал.*

**2 (Ц.Дашдорж).** $F_0 = 0, F_1 = 1, n \geq 2$ үед $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ Фибоначчийн дараалал байг. $F_n^2 / F_m \Leftrightarrow nF_n \mid m$ гэж батал.

**3 (Б.Батбаясгалан).** Гольфийн талбайд тус бүр $n$ хүнтэй 2 баг гарав. Тоглогч бүр эсрэг багийн яг $r$ тоглогч руу цохилт хийх боломжтой. Талбайд нэг ширхэг бөмбөг байсан ба бөмбөг авсан тоглогч урьд нь бөмбөг цохиогүй, эсрэг багийн аль нэг тоглогч руу л цохиж болох байв. Хамгийн сүүлд цохилт хийж чадсан баг хожих бол бөмбөгийг тоглолтонд оруулсан баг хожих уу эсрэг баг нь хожих уу? Хэрэв $A$ тоглогч $B$ тоглогч руу цохих боломжтой бол $B$ тоглогч $A$ тоглогч руу цохих боломжтой гэж үз.

**1.**

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{M_n^{[r]}(a;w)}{M_n^{[1]}(a;w)}\right)^r \geq \left(\frac{M_n^{[s]}(a;w)}{M_n^{[1]}(a;w)}\right)^s$$

болох ба $f(x) = \left(\frac{M_n^{[x]}(a;w)}{M_n^{[1]}(a;w)}\right)^x$. гэсэн функц авч үзье.
Бид $f(r) \geq f(s), \quad (r \geq s)$ гэж баталбал хангалттай. Хялбар тооцоо хийж

$$f'(x) = \frac{1}{x\left(M_n^{[1]}(a;w)\right)^x}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i a_i^x \ln a_i^x}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i a_i^x}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i} \ln\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i}\right)^x\right)$$

болохыг харж болох ба энэ нь $g(x) = x\ln x$ гэсэн хотгор функцийн хувьд жинтэй Иенсений тэнцэтгэл биш ёсоор

$$f'(x) \geq 0, \qquad 0 < x$$

тул (1) батлагдлаа.

Дараах функцийг авч үзье.

$$\varphi(x) = \left(\frac{M_n^{[x]}(a;w)}{M_n^{[0]}(a;w)}\right)^x$$

Дээрхтэй адилаар

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x\left(M_n^{[0]}(a;w)\right)^x}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i a_i^x \ln a_i^x}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i a_i^x}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i} \ln\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i}\right)^x\right)$$

энэ нь $\varphi'(x) \geq 0$. Кошийн тэнцэтгэл биш бичвэл

$$\left(\frac{M_n^{[r]}(a;w)}{M_n^{[0]}(a;w)}\right)^r + \left(\frac{M_n^{[0]}(a;w)}{M_n^{[s]}(a;w)}\right)^s \geq \left(\frac{M_n^{[s]}(a;w)}{M_n^{[0]}(a;w)}\right)^s + \left(\frac{M_n^{[0]}(a;w)}{M_n^{[s]}(a;w)}\right)^s \geq 2$$

(2) гэж гарна. Тэнцэтгэл бишүүд зөвхөн $a_1 = \cdots = a_n$ үед л тэнцэлдээ хүрнэ.

**2.** ▲ MKI, 1.12-5-д

$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n \tag{1}$$

$$(F_n, F_k) = F_{m,n} \tag{2}$$

гэж баталсан. (2)-оос $F_n \mid F_m$ бол $m = kn$ гэж гарна. Мөн $F_n \pmod{F_n^2} = F_n \neq 0$ байна. (1)-ээс

$$F_{2n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n \equiv 2F_n F_{n+1} \pmod{F_n^2} \tag{3}$$

учир нь

$$F_n F_{n+1} \equiv F_n F_{n-1} \pmod{F_n^2} \tag{4}$$

Үүний адилаар

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \equiv F_{n+1}^2 \pmod{F_n^2} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} F_{3n} = F_{2n+1}F_n + F_{2n}F_{n-1} &\overset{(5),(3)}{\equiv} F_{n+1}^2 F_n + (2F_n F_{n+1})F_{n-1} \\ &\overset{(4)}{\equiv} 3F_{n+1}^2 F_n \pmod{F_n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{3n+1} = F_{2n+1}F_{n+1} + F_{2n}F_n &\overset{(5),(3)}{\equiv} F_{n+1}^3 F_n + (2F_n F_{n+1})F_n \\ &\equiv F_{n+1}^3 \pmod{F_n^2} \end{aligned}$$

Индукцээр ($k$-аар )

$$F_{kn} \equiv kF_n F_{n+1}^{k-1}\ , \qquad F_{kn+1} \equiv F_{n+1}^k \pmod{F_n^2} \tag{6}$$

гэж баталж болно. $F_{kn+1} \equiv F_{n+1}^k = 1$ тул

$$F_{kn} \equiv 0 \pmod{F_n^2} \Leftrightarrow kF_n \overset{(6)}{\equiv} 0 \pmod{F_n^2} \Leftrightarrow k \equiv 0(F_n)$$

▼

**3.** Зөв тоглолтонд бөмбөг тоглолтонд оруулсан баг хожихийг баталяа. Тоглогчдоо графын орой гээд бие бие рүүгээ цохих боломжтой тоглогчдийг ирмэгээр холбовол орой бүрийн зэрэг нь $r$ байх, туйл бүрдээ $n$ оройтой, 2 туйлт граф үүснэ. Бодолтонд дараах теоремийг ашиглая.

**Холлийн теорем.** $V_1$, $V_2$ туйлуудтай 2 туйлт графийн $\forall X \subseteq V_1$-ийн хувьд

$$|X| \leq |\Gamma(X)|$$

нөхцөл биелэх бол $V_1$-ийн орой бүрийг $V_2$-ийн ялгаатай оройнуудад ирмэгээр харгалзуулж болно. Энд $\Gamma(X)$ нь $X$ оройн олонлогтой ирмэгээр холбогдсон $V_2$-ийн бүх оройнуудын олонлог юм.

Бодлогын нөхцөлөөс бидний авч үзэж байгаа граф Холлын теоремийн нөхцөлийг хангах нь илэрхий байна. Учир нь $X \cup \Gamma(X)$ оройнуудыг тэдгээрийг холбож байгаа ирмэгүүдийн хамт авахад үүсэх графын

$X$-ийн орой бүрийн зэрэг $r$, $\Gamma(X)$-ийн орой бүрийн зэрэг $r$-ээс хэтрэхгүй байна. Нөгөө талаас 2 туйлт граф тул $X$-ийн оройнуудын зэргүүдийн нийлбэр $\Gamma(X)$-ийн оройнуудын зэргүүдийн нийлбэртэй тэнцүү тул $|X| \leq |\Gamma(X)|$ байна. Иймд бөмбөг тоглолтонд оруулсан багийн тоглогч бүрийг эсрэг багийн ялгаатай тоглогчид руу ирмэгээр дамжуулан харгалзуулж болно. Энэ тохиолдолд эхний багийн тоглогч бүр эсрэг багийн дээрх харгалзаагаар харгалзах тоглогч руу цохилт хийгээд байхад үргэлж цохилт хийж чадах тул бөмбөг тоглолтонд оруулсан баг ямар ч тохиолдолд хожино.

# ОУМО-48, IV сорил

Ц.Дашдорж

**1 (Д.Батнасан).** Төгсгөлөг тооны натурал тоо өгөгдөв. Эдгээрээс дурын $n$ ширхэг тоонууд сонгох бүрд нэг нь нөгөөгөө хуваадаг 2 тоо олддог байв. Тэгвэл эдгээр тоонуудыг $n-1$ ширхэг өнгөөр ижил өнгийн дурын 2 тооны нэг нь нөгөөгөө хуваадаг байхаар будаж болохыг батал.

**2 (Ц.Дашдорж).** $P_0(x) = x, P_1 = 4x^3 + 3x \quad n \geq 1$ үед $P_{n+1}(x) = (4x^2+2)P_n(x) - P_{n-1}(x)$ ба $m \geq 1$ үед $A(m) = \{P_n(m) \mid n \in \mathbb{N}\}$ гэе. $A(m)$ ба $A(m+4)$ нь ерөнхий элементгүй.

**3 (У.Батзориг).** $a, b, c \in \mathbb{N}$ өгчээ. $a^x + x + b \equiv 0(c)$ байх $\exists x \in \mathbb{N}$ гэж батал.

**1.** **Теорем(Дилуорс)** $M$ эрэмбэлэгдсэн олонлог байг. $M$ олонлогт орших максимол (хамгийн их элементэй) антигинжний элементийн тоо $n$ бол $M$ олонлогийг $n$ ширхэг гинжүүдэд хувааж болно.

$M$ нь өгөгдсөн натурал тоонуудын олонлог байг. $M$-д эрэмбийн харьцааг $[(a \leq b) \Leftrightarrow (a$ нь $b$-г хуваана$)]$ гэж тодорхойлбол $M$ нь эрэмбэлэгдсэн олонлог болно. Бодлогын нөхцөл ёсоор максимол антигинжний элементийн тоо $s$ гэвэл $s \leq n-1$ болно.
Дилуорсын лемм ёсоор $M$-г $s$-өнгөөр (ижил өнгийн элементүүд гинж үүсгэнэ) түүгээр ч барахгүй $n-1$ өнгөөр будаж болно. Нэг өнгийн элементүүд гинж үүсгэнэ. Өөрөөр хэлбэл нэг нь нөгөөгөө хуваана.

**Жич** Дилуорсын теоремийн тухай "Квант" сэтгүүлийн 2005 оны 05 дугаарын "Цепи и антицепи" өгүүллээс уншина уу.

**2.** Характеристик тэгшитгэл $q^2-(4x^2)q+1=0$ тул

$$P_n(x)=c_1(\surd+x)^{2n}+c_2(\surd-x)^{2n},\quad c_1=\frac{x+\surd}{2},\ c_2=\frac{x-\surd}{2}.$$

Үүгээр

$$P_n(x)=\frac{1}{2}[(\surd+x)^{2n+1}-(\surd-x)^{2n+1}]=\sqrt{x^2+1}\cdot Q_n(x),Q_n(x)\in\mathbb{Z}^+[x]$$

$$P_n^2(x)=(x^2+1)Q_n^2 \tag{1}$$

$\exists m, A(m)\cap A(m+4)\neq\emptyset$ гэж үзье. (1)-ээс

$$(m^2+1)Q_n^2(m)=[(m+4)^2+1]Q_n^2(m+4),$$

$$a=Q_n(m)\ b=Q_n(m+4)\in\mathbb{Z}_+,(m^2+1)a^2=[(m+4)^2+1]b^2$$

Иймд $\exists x,y,d\in\mathbb{N},(x,y)=1$

$$m^2+1=dx^2 \tag{2}$$

$$(m+4)^2+1=dy^2 \tag{3}$$

Эндээс $8m+16=d(y^2-x^2),y>x$.
$s\in\mathbb{Z}$ бол $4\nmid s^2+1$ учир (2) ба (3)-аас $x,y$ сондгой тоонууд гэж гарав. Хэрэв $y\geq x+4$ бол $8m+16\geq d[(x+4)^2-x^2]=8d(x+2)\Rightarrow m+2\geq d(x+2)=dx+2d\geq dx+2\rightarrow m\geq dx\Rightarrow m^2+1=dx^2\geq d^2x^2+1\rightarrow d(1-d)x^2\geq 1$ зөрчил.
Иймд $y=x+2$ $2(m+2)=d(x+1)\Leftrightarrow m+2=d\cdot\frac{x+1}{2}\Rightarrow d|m+2\Rightarrow m\equiv-2 \pmod d\Rightarrow m^2+1\equiv 5 \pmod (d)$. Гэтэл $m^2+1\equiv 0(d)$ тул $d/5$ гэж гарав.
$d=1$ бол $x^2=m^2+1$ зөрчил.
$d=5$ бол $5x=2m-1,21m^2+4m+24=0$ зөрчил. Иймд

$$A(m)\cap A(m+4)=\emptyset$$

**3.** $a,a^2,a^3,...$ нь $\pmod C$-ээр үелэх ба үеийн уртыг $\ell$ гэе. Эндээс $a^{i+\ell k}\equiv a^i \pmod c(\forall k,i\in\mathbb{N}$ хувьд$)$ $(\ell,c)=d$ байг. Хэрвээ $c>1$ бол $d<c$ гэж баталъя. $d|c\Rightarrow d\leq c$ байг. Хэрэв $d=c$ бол $c|\ell$ Дараалал $\forall 1$ үед $\pmod c$-ээр ижил 2 тоо байж болохгүйг тэмдэглэе. Яагаад гэвэл $a^i\equiv a^j \pmod c\Rightarrow a^{i+t}\equiv a^{j+t} \pmod c\Rightarrow \ell\mid i-j$ болж зөрчил үүсэв. Эндээс $a,a^2,a^3,...$ дарааллын $\pmod C$-ээрх үе $c$-ээс ихгүй. Иймд $c|\ell\Leftrightarrow c=\ell$. Эндээс $c|a^n$ байх $n$ олдох ба $n$-ээс их $k$ бүрийн хувьд $c|a^k$ болж

$c = 1, \ell = 1$ болоход хүрнэ. Одоо $c$-ээр индукцэлж баталъя.
$c = 1$ үед үнэн. $c > 1$ үед $c$-ээс бага бүх тооны хувьд үнэн байг.
$\Rightarrow d(d < c)$ үед үнэн. Иймд $a^{n_i} + n_i \equiv -i \pmod{d}$ байх
$(i = \overline{0, d-1})$ $n_0; n_1; ...; n_{d-1}$ тоонууд олдоно. $b = qd + r$ байг.

$$a^{n_r} + n_r = -r + md \qquad (*)$$

$$a^{n_r + \ell_k} + n_r + \ell_k = a^{n_r} + (n_r + \ell_k) = -r + md + \ell_k \qquad (**)$$

$k$ нь дурын тооны хувьд үнэн тул $\ell \cdot k$ нь $d$-ийн дурын давталт байхаар сонгож чадна. $\ell_k \equiv (-q - m)d \pmod{\ell}$ байхаар сонгон $(**)$-д оруулъя.

$$a^{n_r + \ell_k} + n_r + \ell_k \equiv r + md + (q - m)d \equiv -r + qd \equiv -b \pmod{c}$$

болж индукцын шилжилт хийгдлээ.

# ОУ-ын Математикийн 48-р олимпиадад оролцсон тухай

Ц.Дашдорж
Б.Сандагдорж

ОУМО-48 2007 оны 7-р сарын 19-31-нд Вьетнамын Ханойд болж өнгөрлөө. Дэлхийн 95 орон оролцсон энэ Олимпиадад Орос 184, Хятад 181, Вьетнам 168, Өмнөд Солонгос 168, АНУ 155,Украйн 154, Япон 154, Хойд Солонгос 151, Болгор 149, Тайван 149 оноогоор эхний 10 байранд шалгарлаа.

Манай улсаас:

1. Б.Сумъяа ( Олонлог сургууль 11-р анги) 24 оноогоор мөнгөн медаль
2. Н.Бямбажав (1-р сургууль 10-р анги) 23 оноогоор мөнгөн медаль
3. Э.Энхзаяа ( Олонлог сургууль 9-р анги) 14 оноогоор хүрэл медаль
4. Э.Тэмүгэ (УБ, 1-р сургууль 10-р анги) 12 оноо
5. Г.Оюундарь (1-р сургууль 10-р анги) 8 оноо
6. Н.Балжинням (Увс, 10-р анги) 7 оноо тус тус авч багийн дүнгээр 88 оноогоор 95 орноос 34-р байранд оров. Багийн орлогч удирдагчаар МУБИС-ийн Б.Сандагдорж явлаа.

ОУМО-49 нь 2008.07.10-22 нд Испанийн Мадридад болохоор төлөвлөгдлөө.

**ОУ-1.** $a_1, a_2, ..., a_n$ өгөгдсөн бодит тоонууд ба $i(1 \leq i \leq n)$ бүрийн хувьд $d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$, $d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}$ гэе.

(а) ямарч $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ бодит тоонуудын хувьд

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2} \qquad (*)$$

гэж батал.

(б) $(*)$-д тэнцэл биелж байх $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ бодит тоонуудын оршихыг үзүүл.

**ОУ-2.** $ABCD$ нь параллелограмм ба $BCED$ тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгт байхаар $A, B, C, D$ ба $E$ цэгүүд өгчээ. $A$-г дайрсан $\ell$ шулуун нь $DC$ хэрчмийг $F$ цэгт, $BC$ шулууныг $G$ цэгт огтолдог ба $EF = EG = EC$ бол $\ell$ нь $DAB$ өнцгийн биссектрис гэж батал.

**ОУ-3.** Математикийн тэмцээнд оролцогчдын зарим нь бие биеэ таньдаг танилууд байв. Аль ч хоёр нь танил байх оролцогчдын бүлгийг хамтлаг гэе. (Тухайлбал ганц хүн ч хамтлаг болно.) Хамтлагийн гишүүдийн тоог түүний хэмжээс гэе. Хамтлагийн хамгийн их хэмжээс нь тэгш тоо байсан бол хоёр өрөөн дэх хамтлагийн хамгийн их хэмжээсүүд нь тэнцүү байхаар бүх оролцогчдыг хоёр өрөөнд байрлуулж болохыг батал.

**ОУ-4.** $ABC$ гурвалжны $BCA$ биссектрис нь багтаасан тойргийг $R$ цэгт, $BC$ талын дундаж перпендикулярыг $P$ цэгт, $AC$ талын дундаж перпендикулярыг $Q$ цэгт огтолдог. $BC$ талын дундаж цэг $K$, $AC$ талын дундаж цэг $L$ гэвэл $RPK$ ба $RQL$ гурвалжнуудын талбай тэнцүү гэж батал.

**ОУ-5.** $a$ ба $b$ натурал тоонууд байг. $4ab-1$ тоо $(4a^2-1)^2$-г хуваадаг бол $a=b$ гэж батал.

**ОУ-6.** $n$ нь натурал тоо байг.

$$S=\{(x,y,z):x,y,z\in\{0,1,...,n\},x+y+z>0\}$$

гэсэн 3 хэмжээст огторгуйн $(n+1)^3-1$ цэгээс тогтох олонлогийг авъя. Нэгдэл нь $S$-ийг агуулах боловч $(0,0,0)$ цэгийг үл агуулах хавтгайнуудын тоо хамгийн багадаа хэд байхыг ол.

**ОУ-1.** (а): $1\le p\le q\le r\le n, d=dq, a_p=\max\{a_j|1\le j\le q\}, a_r=\min\{a_j|q\le j\le n\}$ буюу $d=a_p-a_r$ байг (Энэ индексүүд нэг утгатай байх нь албагүй). Дурын $x_1\le x_2\le ...\le x_n$ бодит тоонуудын хувьд $|x_p-a_p|, |x_r-a_r|$-ийг авч үзье.

$$(a_p-x_p)+(x_r-a_r)=(a_p-a_r)+(x_r-x_p)\ge a_p-a_r=d$$

байх тул $a_p-x_p\ge\frac{d}{2}$ эсвэл $x_r-a_r\ge\frac{d}{2}$ байна. Иймд

$$\max\{|x_i-a_i|\mid 1\le i\le n\}\ge\max\{|a_p-x_p|,|x_r-a_r|\}\ge$$

$$\ge\max\{a_p-x_p,x_r-a_r\}\ge\frac{d}{2}$$

(в): $(x_k)$ дарааллыг $x_1=a_1-\frac{d}{2}, x_k=\{x_{k-1},a_k-\frac{d}{2}\}, 2\le k\le n$ гэж тодорхойлоё. Одоо $(*)$-д тэнцэл биелэхийг харуулъя:
Тодорхойлолт ёсоор $(x_k)$ дараалал үл буурах ба $1\le k\le n$ байх $k$ бүрийн хувьд $x_k-a_k\ge-\frac{d}{2}$ байгаа. Одоо $1\le k\le n$ байх $k$ бүрийн хувьд

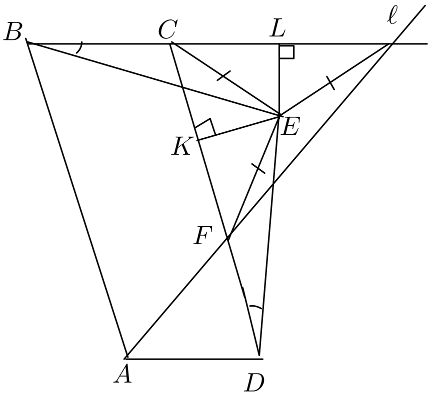
$$x_k-a_k\le\frac{d}{2}\tag{1}$$

гэж харуулая. $1 \le k \le n$ байх $k$-г авъя. $\ell$ нь $x_k = x_\ell$ байх хамгийн бага индекс гэе. Эсвэл $\ell = 1$, эсвэл $\ell \ge 2$ ба $x_\ell > x_{\ell-1}$ байна. Аль ч тохиолдолд

$$x + k = x_\ell = a_\ell - \frac{d}{2} \tag{2}$$

байна. $a_\ell - a_k \le \max\{a_j \mid 1 \le j \le k\} - \min\{a_j \mid k \le j \le n\} = d_k \le d$ байх тул (2)-оос $x_k - a_k = a_\ell - a_k - \frac{d}{2} \le d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$ болж, (1) батлагдав. Үүгээр $\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \le i \le n\} \le \frac{d}{2}$ боллоо. $|x_1 - a_1| = \frac{d}{2}$ тул (в) батлагдав. Одоо (в) хэсгийн өөр нэг бодолт буюу $(x_k)$ дарааллын өөр нэг байгуулалтыг толилуулая. $1 \le i \le n$ бүрийн хувьд $M_i = \max\{a_j \mid 1 \le j \le i\}, m_i = \min\{a_j \mid i \le j \le n\}$ гэе. Бүх $1 \le i \le n$-ийн хувьд $M_i \le M_{i+1}, m_i \le m_{i+1}, m_i \le a_i \le M_i$ байна. $(*)$-д тэнцэл биелэхийн тулд $x_i = \dfrac{M_i + m_i}{2}$ гэж авъя. $(x_i)$ үл буурах дараалал ба $d_i = M_i - m_i$ гэдгээс $-\dfrac{d_i}{2} = \dfrac{m_i - M_i}{2} = x_i - M_i \le x_i - a_i \le x_i - m_i = \dfrac{M_i - m_i}{2} = \dfrac{d_i}{2}$ тул $\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \le 1 \le i \le n\} \le \max\{\frac{d_i}{2} \mid 1 \le 1 \le i \le n\} = \frac{d}{2}$. Иймд (а) ёсоор $(*)$-д тэнцэл биелэнэ.

**ОУ-2.**



$EK$ ба $EL$ нь харгалзан $\triangle\ ECF, \triangle\ EGC$-уудын өндрүүд байг (зураг). $\triangle\ ADF \backsim \triangle\ GCF$ тул:

$$\frac{AD}{GC} = \frac{DF}{CF} \Rightarrow \frac{BC}{CG} = \frac{DF}{CF} \Rightarrow \frac{BC}{CL} = \frac{DF}{CK} \Rightarrow \frac{BC + CL}{CL} = \frac{DF + FK}{CK} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{BL}{CL} = \frac{DK}{CK} \Rightarrow \frac{BL}{DK} = \frac{CL}{CK} \tag{1}$$

болно. $\triangle BLE \backsim \triangle DKE$ тул:

$$\frac{BL}{DK} = \frac{CL}{CK} \tag{2}$$

байна.
(1) ба (2)-оос $\frac{CL}{CK} = \frac{EL}{EK}$ Эндээс $\triangle CLE, \triangle CKE$-ууд төсөөтэй болно. Тиймээс $\frac{CL}{CK} = \frac{CE}{CE} = 1$. Өөрөөр хэлбэл $CL = CK$ буюу $GC = CF$ боллоо. Эндээс $FD = AD$ буюу $AB = BG$ болж бодлого бодогдов.

**ОУ-3.** Оролцогчыг байрлуулах алгоритмыг өгье. Room $A$, Room $B$ гэсэн 2 өрөөтэй ба хугацааны дурын моментод Room $X$-д буй оролцогчдын олонлогийг $X$-ээр, тэнд буй хамтлагийн их хэмжээсийг $c(X)$ гэе.

**Алхам 1** Хамгийн их хэмжээстэй хамтлагийн нэг нь $M$ ба $|M| = 2m$ байг. $M$-ийн бүх гишүүдийг Room $A$-д үлдэх бүх хүнийг Room $B$-д байрлуулъя. Тэгвэл $c(A) = |M| \geq c(B)$ байна.

**Алхам 2** $c(A) > c(B)$ байвал Room $A$-аас 1 хүнийг Room $B$-д илгээе: $c(A) > c(B)$ тул $A \neq \varnothing$ байна. Алхам бүрт $c(A)$ нэгээр буурах ба $c(B)$ нэгээс ихгүйгээр өснө. Иймд

$$k = c(A) \leq c(B) \leq c(A) + 1 \tag{1}$$

байрлалд хүрч чадна: $c(A) = c(B) + 1$ байг.

$$\mathbf{c(A')} = c(A) - 1 = c(B) \leq \mathbf{c(B')} \leq c(B) + 1 = c(A) = \mathbf{c(A') + 1}$$

Эндээс

$$c(A) = |A| \geq \tag{2}$$

гэж гарна. $c(A) < m$ бол $c(B) \geq m + 1 = m - 1 + 2 \geq c(A) + 2$ нь (1)-д зөрчинө.

**Алхам 3** Хэрэв $c(B) = k$ бол бодлого бодогдоно (▼).

Иймд $c(B) = k + 1$-д хүрч ирнэ. ((1) ёсоор).
(2)-оор $k = |A| = |A \cap M| \geq m$ тул

$$|B \cap M| \leq m \tag{3}$$

байна.

**Алхам 4** Хэрэв $\exists x \in B \cap M, \exists C \subset B$ хамтлаг, $|C| = k + 1, x \notin C$ бол $x$-ийг Room $A$-руу илгээнэ, ингэхэд ▼: $x$-ийг Room $A$-руу илгээсний дараа $c(A) = k+1, c(B) = k+1$ болно.

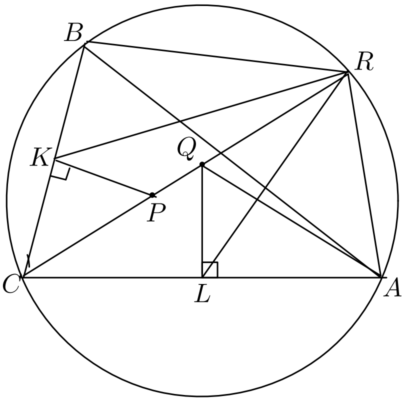
$$\left[\begin{array}{c}\text{Хэрэв ийм биш бол Room } B\text{-ийн } k+1 \\ \text{хэмжээстэй хамтлаг бүр } B\cap M\text{-г агуулна.}\end{array}\right] \qquad (*)$$

**Алхам 5** $c(B) = k+1$ үед $|C| = k+1$ байх $B \supset C$ хамтлагийг сонгож $C \setminus M$-ийн нэг элементийг Room $A$-руу илгээж болно: $|C| = k+1 > m \geq |B\cap M|$ тул $C \setminus M \neq \varnothing$. Алхам 5-г хийх бүрт $c(B) = k$ болно. Харин Room $A$-д $|A\cap M| = k$ байх $A \cap M$ хамтлаг бий тул $c(A) \geq k$. Одоо $c(A) > k$ байж болохгүйг баталъя. $A \supset Q$ дурын хамтлаг байг. $|Q| \leq k$ гэж баталъя. Room $A$-д (тухайлбал $Q$-д) 2 төрлийн оролцогчид байгаа:

1) $M$-ийн гишүүд $M$ хамтлаг тул тэд $B \cap M$-ийн бүх гишүүдтэй танил.

2) Алхам 5-аар Room $A$-д ирэгсэд. Тэд $(*)$ ёсоор $B\cap M$-ийн бүх гишүүдтэй танил. Иймд 1) ба 2)-оор $Q$-ийн гишүүд бүр $B \cap M$-ийн бүх гишүүдтэй танил. $Q$ ба $B \cap M$-үүд нь тус бүрдээ хамтлаг тул $Q \cup (B\cap M)$ мөн хамтлаг болно. $M$ хамгийн их хэмжээстэй хамтлаг тул $|M| \geq |Q \cup (B \cap M)| = |Q| + |B\cap M| = |Q| + |M| - |A \cap M|$ буюу $|Q| \leq |A \cap M| = k$. Иймд алхам 5-г хийсээр $c(A) = c(B) = k$ болно.

**ОУ- 4.**



$S_{RPK} = S_{RCK} - S_{PCK} = \frac{1}{2}\cdot S_{RBC} - \frac{1}{2}\cdot S_{BPC} = \frac{1}{2}(S_{RBC} - S_{BPC}) = \frac{1}{2}S_{RBP}$ байна. Үүнтэй адилаар $S_{RQL} = \frac{1}{2}S_{ARQ}$ болно. $CR$ биссектрис учир

$\measuredangle BPR = \measuredangle AQR = \gamma$ байна. $\measuredangle PRB = \alpha, \measuredangle QRA = \beta$ учир $\measuredangle PBR = \beta, \measuredangle QAR = \alpha$ болох бөгөөд $BR = AR$ тул $\triangle\ BPR =\triangle\ RQA$ болж бодлого бодогдов.

**ОУ-5.** $x \neq y$ боловч $4xy - 1 \mid (4x^2 - 1)^2$ бол $(x, y) \in \mathbb{N}^2$-ыг муу хос гэе.

а) $(x, y), x < y$ нь муу хос бол $\exists z < x, (x, z)$ хос оршихыг баталъя.

$$r \rightleftarrows \frac{(4x^2-1)^2}{4xy-1}$$

гэвэл

$$r = -r(-1) \equiv -r(4xy - 1) = -(4x^2 - 1)^2 \equiv -1 \pmod{4x}$$

тул $\exists z \in \mathbb{N}, r = 4xz - 1$. $x < y$-ээс

$$4xz - 1 = \frac{(4x^2-1)^2}{4xy-1} < 4x^2 - 1$$

буюу $z < x$. $4xz - 1 \mid (4x^2 - 1)^2$ тул $(x, z)$ муу хос

б) $(x, y)$ муу хос бол $(y, x)$ мөн муу хос байна.

$$1 = 1^2 \equiv (4xy)^2 \pmod{4xy - 1}$$

учир

$$(4y^2 - 1)^2 \equiv (4y^2 - (4xy)^2)^2 = 16y^4(4x^2 - 1)^2 \equiv 0 \pmod{4xy - 1}$$

учир $4xy - 1 \mid (4y^2 - 1)^2$ болно.
Муу хос оршдог гэе. $2x+y$ нь хамгийн бага байх муу хос нь $(x, y)$ байг. Хэрэв $x < y$ бол а)-аар $\exists (x, z), z < x$ муу хос орших тул түүний хувьд $2x + z < 2x + y$ болно. Хэрэв $y < x$ бол б)-ээр $(y, x)$ мөн муу хос ба $2y + x < 2x + y$ байна. Өөрөөр хэлбэл $x \neq y$ л бол аль ч тохиолдолд $2x + y$ хамгийн бага гэдэгт зөрчив. Иймд $x = y$ байна.

**ОУ-6** Тийм $3n$ хавтгайг олох нь төвөггүй: $x = i, y = i, z = i \quad i = \overline{1, n}$ хавтгайнууд нь $S$-г бүрхэх ба эдгээрийн аль нь ч $(0, 0, 0)$-г дайрахгүй. Өөр нэг жишээ гэвэл $x+y+z = k, k = \overline{1, 3n}$-үүд юм. Одоо $3n$ нь хамгийн бага тоо гэдгийг баталъя.

**Лемм 1.** $k$ хувьсагчийн $P(x_1, ..., x_k) \not\equiv 0$ олон гишүүнтийг авъя. Хэрэв $x_1 + ... + x_k > 0, x_1, ..., x_k \in \{0, 1, ..., n\}$ байх $(x_1, ..., x_k)$ цэг бүрийн хувьд $P(x_1, ..., x_k) = 0$ ба $P(0, 0, ..., 0) \neq 0$ бол $\deg P \geq kn$ байна.

▲ $k$-аар индукцлэе. $P \not\equiv 0$ тул $k = 0$ тохиолдол илэрхий байна. $y = x_k$ гэж авбал эвтэй байна. $Q(y) = y(y - 1)...(y - n)$ модулаарх

$P(x_1,...,x_k)$-ийн хаслагийг $R(x_1,...,x_{k-1},y)$ (МКII, х.56, санамж 2) гэе, өөрөөр хэлбэл

$$P(x_1,...,x_{k-1},y)=R(x_1,...,x_{k-1},y)+Q(y)\cdot S(x_1,...,x_{k-1},y).$$

Эндээс $y\in\{0,1,...,n\}$ бүрийн хувьд

$$P(x_1,...,x_{k-1},y)=R(x_1,...,x_k,y) \tag{1}$$

Иймд $R(0,...,0)=P(0,...,0)\neq 0$ тул $R\not\equiv 0$ байх $R(x_1,...,x_{k-1},x_k)=R(x_1,...,x_{k-1},y)$ олон гишүүнт мөн Лемм 1-ийн нөхцөлийг хангана. $\deg R\leq n$ байгаа $\deg R\leq \deg P$ байх нь илэрхий тул $\deg R\geq nk$ гэж баталбал болно.

$$R(x_1,...,x_{k-1},y)=R_n(x_1,...,x_{k-1})y^n+...+R_0(x_1,...,x_{k-1}) \tag{2}$$

$(*)$ [ Одоо $R_n(x_1,...,x_{k-1})$ индукцийн нөхцөлд оршихыг харуулая.]

$T(y)=R(0,...,0,y),\deg T(y)\leq n$ ба $T(s)\overset{(1)}{=}0,s=\overline{1,n}$ байна. Нөгөө талаас $T(0)\neq 0$ тул $T(y)\not\equiv 0$ байна. Иймд $\deg T=n$ байх тул түүний ахмад коэффицент $\mathbf{R_n(0,...,0)\neq 0}$, тухайлбал $k=1$ үед $R_n\neq 0$ гэж гарна.

$$a_1,...,a_{k-1}\in\{0,1,...,n\},a_1+...+a_{k-1}>0$$

байг. $R(a_1,...,a_{k-1},y)=S(y)$ гэвэл $S(k)=0,k=0,...,n$ ба $\deg S\leq n$ тул $S(y)\equiv 0$ буюу (3) нөхцөлд

$$R_i(a_1,...,a_{k-1})=0,\ i=\overline{0,n} \tag{4}$$

болно. Эндээс тухайн нөхцөлд $\mathbf{R_n(a_1,...,a_{k-1})=0}$. Үүгээр $(*)$ биелэгдэж индукцэд үзэж буйгаар $\deg R_n\geq(k-1)n$ болох тул $\deg P\geq\deg R\geq\deg R_n+n\geq kn$▼

# Монголын Оюутны Математикийн

# XV Олимпиад

Ц.Дашдорж

### а) Эчнээ даваа

### I хэсэг (ОМ1–ОМ4)

**1 (В.Адьяасүрэн).** $P(x)$ нь ялгаатай $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ язгууруудтай $n$ зэргийн олон гишүүнт. $b$ нь $2b < a_1 + a_2$ байх бодит тоо бол $2^{n-1} \cdot |P(b)| \geq |P'(a_1)(b - a_1)|$ гэдгийг батал.

**2 (В.Адьяасүрэн).** $f \in C'([0;1])$ ба $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 0$ байвал $2\int\limits_0^1 (f(x))^2\,dx \leq \int\limits_0^1 |f'(x)|\,dx \cdot \int\limits_0^1 |f(x)|\,dx$ гэдгийг батал.

**3 (В.Адьяасүрэн).** $\{x_n : n \geq 1\}$ нь $\left(\frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{n+x_n} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ гэж тодорхойлогдсон байг. $\{x_n\}$ дарааллыг нийлнэ гэж батлаад, хязгаарыг нь ол.

**4 (В.Адьяасүрэн).** $f(x)$ функц $x_0$ цэгийн ямар нэг орчинд дифференциалчлагдах бөгөөд $f'(x)$ нь $x_0$ цэг дээр тасралтгүй байвал $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(f\left(x_0 + \frac{k}{k^2+n^2}\right) - f(x_0)\right) = f'(x_0) \cdot \ln\sqrt{2}$ гэдгийг батал.

**5 (Ц.Дашдорж).** Хоёроос цөөнгүй элементтэй төгслөг коммутатив цагираг $A$ байг. $2 \leq n$ байх $n$ бүрийн хувьд $A$-д язгуургүй $n$ зэргийн олон гишүүнт олдохыг харуул.

**6 (Ц.Дашдорж).** $G = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A = \pm 1\}$, $H = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$ бол $(G, \cdot)$ ба $(H, \cdot)$-үүд нь изоморф биш бүлгүүд гэж батал.

**7 (Ц.Дашдорж).** $n, p \geq 2$ ба $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A^{p+1} = A$ бол

а) $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(E_n - A^p) = n$ гэж батал.

б) $p \in \mathbb{P}$ бол $\operatorname{rank}(E_n - A) = \operatorname{rank}(E_n - A^2) = \cdots = \operatorname{rank}(E_n - A^{p-1})$ гэж батал.

**8 (Ц.Дашдорж).** $x > 0$ ба $A \in M_2(\mathbb{R})$, $\det(A^2 + xE_2) = 0$ бол $\det(A^2 + A + xE_2) = x$ гэж батал.

**9 (Ц.Дашдорж).** $\chi(A) = 5$ ба $\forall x, y \in A$, $x^4y^3 = y^3x^4$ бол $A$ коммутатив цагираг гэж батал.

**10 (Ц.Дашдорж).** $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, $|\alpha| = 1$ бол $\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + \alpha b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$-үүдээс яг 2 олонлог нь нэмэх ба үржих үйлдлийн хувьд цагираг болохыг батал.

**11 (Ц.Дашдорж).** $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ ба $X = AB + BC + CA$, $Y = BA+CB+AC$, $Z = A^2+B^2+C^2$ бол $\det(2Z-X-Y) \geq 3\det(X-Y)$ гэж батал.

**12 (Ц.Дашдорж).** а) $P(x) = x^5 \in \mathbb{R}[x]$, $\forall 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$-ийн хувьд $P(x + \alpha) - P(x)$ бодит язгуургүй гэж батал.

б) $P \in \mathbb{R}[x]$ ялгаатай бодит язгууруудтай $2 \leq n$ зэргийн олон гишүүнт бол $\exists 0 \neq \alpha \in \mathbb{Q}$, $P(x + \alpha) - P(x)$ нь зөвхөн бодит язгууртай гэж батал.

**13 (Ц.Дашдорж).** Ямар ч төгслөг бүлэг нь $A_n$-д багтана гэдгийг батал ($\exists n$).

**14 (Ц.Дашдорж).** $n > 3$ ба $\pi \in S_n$ нь $\forall\tau$-транспозицийн хувьд $\tau\pi\tau^{-1}$-тэйгээ байр сольдог бол $|\pi| = 2$ гэж батал.

**15 (Ц.Дашдорж).** $M \lhd G$, $P$ нь $M$-ийн Силовын $p$-дэд бүлэг бол $N_G(P) \cdot M = G$ гэж батал.

**16 (Ц.Дашдорж).** $G$ төгслөг, $P$-Силовын дэд бүлэг, $N_G(P) \subseteq H \leq G$ бол $N_G(H) = H$ гэж батал.

## II хэсэг (ОМ2–ОМ4)

**1 (В.Адьясүрэн).** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ нь $[-1; 1]$ хэрчмийг агуулсан задгай интервал дээр 2 удаа дифференциалчлагдах функц байв. $0 < \alpha \leq \gamma$ ба $\forall x \in [-1; 1]$: $|f(x)| \leq \alpha$, $|f''(x)| \leq \gamma$ нөхцлүүд биелж байвал $\forall x \in [-1; 1]$: $|f'(x)| \leq 2\sqrt{\alpha\gamma}$ гэж батал.

**2 (В.Адьясүрэн).** $\int\limits_0^1 x^x \, dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \ldots$ гэж батал.

**3 (В.Адьясүрэн).** $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\left|\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{(n)}\right| \leq \dfrac{1}{n+1}$ гэж батал.

**4 (В.Адьясүрэн).** $|a| > 1$ ба $n \in \mathbb{N}$ бол $\int\limits_0^\pi \frac{\sin^{2n} x \, dx}{(1-2a\cos x+a^2)^n}$ тооцоол.

**5 (Ц.Дашдорж).** $\alpha = \sqrt{(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})}$, $E = \mathbb{Q}(\alpha)$ бол $G(E/\mathbb{Q}) = ?$

**6 (Ц.Дашдорж).** $\sigma, \tau :\ F(x) \to F(x)$, $\forall f(x) \in F(x)$, $\sigma f(x) = f\big(\frac{1}{1-x}\big)$, $\tau f(x) = f\big(\frac{1}{x}\big)$ бол

а) $\sigma, \tau \in \mathrm{Aut}(F(x) \mid F)$ ба $G =< \sigma, \tau >= S_3$ гэж батал.

б) $t = \frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}$ гэвэл $\forall \pi \in G$-ийн хувьд $\pi(t) = t$ гэж батал.

в) $F(t) = F(x)^G$, $F\big(x + \frac{1}{x}\big) = F(x)^{<\tau>}$, $F(x(1-x)) = F(x)^{<\tau\sigma^2>}$ гэж батал.

г) $F(x)^{<\tau\sigma>}$ ба $F(x)^{<\sigma>}$-үүдийг тодорхойл.

**7 (Ц.Дашдорж).** $f(x) = x^8 - 2$-ийн Галуагийн харгалзааг байгуул.

**8 (Ц.Дашдорж).** $G$ төгслөг абелийн бүлэг бол $\exists K|\mathbb{Q}$, $G(K|\mathbb{Q}) = G$ гэж батал.

### Зарим бодлогын бодолтууд

**5.** $\varphi : A \longrightarrow A, \varphi(x) = x^n - x$ гэвэл $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$ байх тул $\varphi$-ын буулгалт нь харилцан нэгэн утгатай биш ба $A$ төгслөг олонлог учир $\varphi(A) \neq A$. Иймд $\exists a \in A \backslash \varphi(A)$. Тэгвэл $f = x^n - x - a$ олон гишүүнт нь $A$-д язгуургүй.

**6.** $G \cong H$ бол $x^2 = E_2(1)$ тэгшитгэл нь энэ 2 бүлэгт тэнцүү тооны язгууртай байх ёстой. Гэтэл $H$-д $\pm E_2$ гэсэн яг 2 язгууртай:
$X \in F_2$ бүр нь $X^2 - trX \cdot X + \det X \cdot E_2 = 0_2$-ийн язгуур болдог тул $x \in H$ бол $2E_2 = trX \cdot X$ болох тул $X = \pm E_2$.
Нөгөө талаас $a \in \mathbb{R}^\circ$ бол $C_a = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ бүр нь (1)-ийн язгуур болох ба $C_a \in G$ өөрөөр хэлбэл (1) нь $G$-д төгсгөлгүй олон язгууртай, харин $H$-д яг 2 язгууртай болно. Иймд $G$ ба $H$ нь изоморф биш бүлгүүд юм.

**7.** а) $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ бол

$$r(A) + r(B) \leq r(AB) + n \tag{1}$$

гэсэн Сильвестрийн тэнцэл бишээр $r(A) + r(E_n - A^p) \leq r(A(E_n - A^p)) + n = n$
Нөгөө талаас $r(A) + r(E_n - A^p) \geq r(A^p) + r(E_n - A^p) \geq r(A^p + E_n - A^p) = n$ б) $k|m$ бол $r(E_n - A^k) \geq r(E_n - A^m)$ : $m = kd$ бол $E_n - A^m = E_n - A^{k\cdot d} = E_n^d - A^{k\cdot d} = (E_n - A^k)B$ тул $r(E_n - A^m) = r((E_n - A^k)B) \leq r(E_n - A^k)$.
$k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq p-1$ байг. $\forall k, A^{kp+1} = A$ байна. $p \in \mathbb{P}$ тул $\{p+1, 2p+1, ..., kp+1\}(modk) = \mathbb{Z}_k$ байна гэдгээс $\exists t, k|t = qp+1$.
Тэгвэл $r(E_n - A) \geq r(E_n - A^k) \geq r(E_n - A^t) = r(E_n - A^{pq+1}) = r(E_n - A)$.

**8.** $\det(A + i\sqrt{xE_2})\det(A - i\sqrt{xE_2}) = 0$ байх учир $d = \det A, t = trA$ гэвэл $d = x, t = 0$ гэж олно. Иймд $A^2 + xE_2 = 0$ буюу $\det(A^2 + A + xE_2) = \det A = x$

**12.** а) $(x+\alpha)^5 = x^5, x \neq 0 \Leftrightarrow (\dfrac{x+\alpha}{x})^5 = 1$. Эндээс $\dfrac{x+\alpha}{x} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}, x \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

в) $x_1 < ... < x_n$-үүд нь $P$-ийн язгуурууд ба $y_k \in (x_k, x_{k+1})$-үүд нь $P'$-ийн язгуурууд байг.

$$\beta = \min\{y_k - x_k, x_{k+1} - y_k / 0 \leq k \leq n-1\}\ (x_k, x_{k+1})$$

интервал бүрт $0 < \alpha < \beta$ байх $\alpha$ бүрийн хувьд
$g(x) = P(x+\alpha) - P(x)$-г авч үзье. $y_k$ нь $(x_k, x_{k+1})$ дахь $P$-ийн ганц экстремумын цэг билээ, тухайлбал максимумын цэг гэвэл

$$g(x_k) = P(x_k+\alpha) - P(x_k) > 0, g(y_k) = P(y_k+\alpha) - P(y_k) < 0$$

тул $\exists Z_k \in (x_k, x_{k+1}), g(Z_k) = 0$. $\alpha \in (0,\beta) \cap \mathbb{Q}$-г авахад бодлого бодогдоно.

**13.** $S_n$ бүлэг $A_{n+2}$-д изоморфоор багтана гэж харуулбал болно. $S_n(1,...,n), A_{n+2}(1,2,...,n,n+1,n+2), \pi = (n+1,n+2)$ гэе. $\sigma \in S_n$,

$$f(\sigma) = \begin{cases} \sigma, & \sigma \text{ тэгш орлуулга} \\ \sigma\pi, & \sigma \text{ сондгой орлуулга} \end{cases}$$

$f$ мономорфизм гэдгийг шалгахад төвөггүй.

**14.** $\pi = \pi_1 ... \pi_k$, энд $\pi_i$ нь үл огтлолцох циклүүд ба $\exists i, \pi_i$ нь 3-аас багагүй урттай гэж үзэж чадна. Тэгвэл $\pi(\tau\pi_i\tau^{-1})(i) = k, (\tau\pi_i\tau^{-1})\pi(i) = \ell$ Иймд $\pi$ ба $\tau\pi_i\tau^{-1}$ нь байр солихгүй. Эндээс $\pi_i$ бүр нь 2 урттай транспозиц байна. Тэгвэл $|\pi| = 2$ болно.

**15.** $\forall g \in G$ бол $P^g \subseteq M^g = M$ буюу $P^g, P$ нь $M$-ийн Силовын дэд бүлгүүд тул $\exists H \in M, P^g = P^h, P^{gh^{-1}} = P, gh^{-1} \in N_G(P) \Rightarrow g = (gh^{-1})h \in N_G(P) \cdot M$ буюу $G \subseteq N_G(P) \cdot M$.

**16.** $H \subseteq N_G(H)$ тул $N_G(H) \subseteq H$ гэж батлая. $\forall g \in N_G(H), H^g = H$. $P \subseteq N_G(P) \subseteq H$ гэдгээс $P^g \subseteq H^g = H$. Эндээс $P^g$ ба $P$-үүд нь $H$-ийн Силовын дэд бүлгүүд боллоо. Иймд $\exists h \in H, P^g = P^h, P^{gh^{-1}} = P, gh^{-1} \in N_G(P) \subseteq H$. Эндээс $g \in H$.

## II хэсэг

**5.** а) $\alpha$ нь $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$-д Квадрат биш: Хэрэв $\alpha = c^2, c \in F$ бол $\varphi \in G(F|\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$-ийн хувьд $\alpha\varphi(\alpha) = (2+\sqrt{2})^2 \cdot 6 = (c\varphi(c))^2$ болно. $c\varphi(c) = N_{F|\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(c) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ байх ёстой тул $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ зөрчилд хүрэв.

б) а)-аас $[F:\mathbb{Q}] = 8$ гэж гарна. $P(x) = P_{\alpha|\mathbb{Q}}(x)$-ийн 8 язгуур нь $\pm\sqrt{(2\pm\sqrt{2})(3\pm\sqrt{3})}$ гэж батал.

в) $\beta = \sqrt{(2-\sqrt{2})(3+\sqrt{3})}$ гэе. $\alpha\beta = \sqrt{2}(3+\sqrt{3}) \in F$ болох тул $\beta \in E$ болно. Бусад язгуурууд ч мөн $E$-д орно, иймд $E|\mathbb{Q} \in Gal$ болно. $G = G(E|\mathbb{Q})$-ийн элементүүд нь $\alpha$-ийн б)-д буй 8 элементийн аль нэгд буулгана.

г) $\sigma \in G, \sigma(\alpha) = \beta$ байг. $\sigma(\alpha^2) = \beta^2$ байх учир $\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \sigma(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ болно. $\alpha\beta = \sqrt{2}(3+\sqrt{3})$-аас $\sigma(\alpha\beta) = -\alpha\beta$. Эндээс $\sigma(\beta) = -\alpha|\sigma| = 4$ гэж үзүүлж болно.

д) г)-тэй адилаар $\tau(\alpha) = \sqrt{(2+\sqrt{2})(3-\sqrt{3})}$ гэвэл мөн $|\tau| = 4$ болно. $< \sigma, \tau | \sigma^4 = \tau^4 = 1, \sigma^2 = \tau^2, \sigma\tau = \tau\sigma^3 >$ гэж баталж болно.

е) $G \cong Q_8$- 8 эрэмбийн кватерниона бүлэг гэж батална.

**6.** $\sigma^3(x) = x$ тул $\sigma^3 = e, \tau^2(x) = x$ тул $\tau^2 = e$ гэж гарна. Мөн $\sigma\tau = \tau\sigma$ болохыг шалгаж болно. Иймд $< \sigma, \tau >= G$ гэвэл $|G| = G$ ба $G \cong S_3$ болох нь илт байна.

## Мэдээлэл

**Монголын Оюутны математикийн 16-р Олимпиадын "Онолын математик" ангиллын багуудын тэмцээн 2007.04.21-нд МУИС, МКС дээр боллоо.**

**1).** $x^{2n} + x^n + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ үл задарна. $\Leftrightarrow n = 3^k$ гэж батал. (оноо 4)

**2).** $p \in \mathbb{P}, \varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{p}}$ байг. Хэрэв тэг биш бүхэл тоо $a_0, a_1, ..., a_{p-1}$-үүдийн хувьд $a_0 + a_1\varepsilon + ... + a_{p-1}\varepsilon^{p-1} = 0$ бол $a_0 = a_1 = ... = a_{p-1}$ гэж батал. (оноо 4)

**3).** $f(x) \in F_p[x], \deg f = m \geq 1, f(0) \neq 0$ бол $\exists e \leq q^m - 1,\ f|x^e - 1$ (оноо 6).

**4).** $S_5$-д 30 ба 40 эрэмбийн дэд бүлэг байхгүйг батал (оноо 4).

**5).** $|G| = 60$ ба $G$-ийн Силовийн 5-дэд бүлгийн тоо $n_5$ нь 1-ээс их бол $G$ энгийн бүлэг гэж батал (оноо 8).

Бодлогуудыг дэвшүүлсэн Ц.Дашдорж

| | I (4) | II (4) | III (6) | IV (4) | V (8) | байр |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ОМ-I | 2 | | | 2 | | 4 оноо, III |
| ОМ-II | 4 | 4 | 6 | | | 14 оноо, I |
| ОМ-III | 2 | | 6 | | | 8 оноо, II |

Багууд авсан оноотойгоо пропорционалаар 80000 төгрөгийг хуваaж авав.

I-байр эзэлсэн Г.Батзаяа ахлагчтай ОМII баг шилжин явах цом авлаа.

**Бодолтууд**

**1.** $\Leftarrow$: $\Phi_3(x) = x^2 + x + 1$ ба МКII, хуудас 23-ын (6)-аар

$$\Phi_{3^s}(x) = \Phi_3(x^{3^{s-1}})$$

ба МКII, хуудас 68-ын бодлого 6-аар $\Phi_{3^s}(x)$ үл задрах олон гишүүнт тул $x^{2\cdot 3^k} + x^{3^k} + 1 = \Phi_{3^{k+1}}(x)$ $\mathbb{Q}$ дээр үл задарна, иймд $\mathbb{Z}$ дээр үл задарна.

$\Rightarrow$: $n = 3^k \cdot n_1, k \geq 1, (n_1, 3) = 1$ ба $n_1 > 1$ гэж үзье. Тэгвэл $x^{2n} + x^n + 1 = \Phi_3(x^n) = \Phi_3(x^{3^k \cdot n_1}) \Rightarrow \Phi_3(x^{3^k}) | \Phi_3(x^{3^k \cdot n_1}) = \Phi_3(x^n)$ учир нь $(m, n) = 1$ бол $\Phi_{mn}(x) | \Phi_n(x^m)$ байдаг. Иймд $n_1 = 1$.

**2.**

$$f = a_0 + a_1 x + ... + a_{p-1} x^{p-1}, \Phi_p(x) = 1 + x + ... + x^{p-1},$$

$$f(\varepsilon) = \Phi_p(\varepsilon) = 0$$

тул $\deg(f, \Phi_p) > 1, (f, \Phi_p) | \Phi_p(x)$ ба 11.7-5-аар $\Phi_p(x)$ $\mathbb{Z}$ дээр үл задрах тул $(f, \Phi_p) = \Phi_p | f$ ба 11.1-ийн Санамж 2.-оор $f = k \cdot \Phi_p(x), \exists k \in \mathbb{Z}$. Эндээс $a_0 = a_1 = ... = a_{p-1} = k$ болов.

**3.** $F_p[x]/(f)$ фактор цагирагт тэг биш элемент $q^m - 1$ ширхэг бий ба $x^j + (f), j = 0, 1, ..., q^m - 1$ гэсэн $q^m$ ширхэг зэрэгцээ ангиуд нь фактор цагирагийн тэг биш элементүүд тул $\exists r, s \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < s \leq q^m - 1, x^s \equiv x^r \pmod{f(x)}$ ба $(x, f(x)) = 1$ гэдгээс $x^{s-r} \equiv 1 \pmod{f}$. Иймд $f(x) | x^{s-r} - 1, 0 < s - r \leq q^m - 1$.

**4.** $H \leq S_5$ ба $|H| = 30$ байг. $[S_5 : H] = 120/30 = 4$. Иймд $\exists \varphi$-гомоморфизм: $S_5 \longrightarrow S_4, \ker\varphi \subseteq H$ ба $\ker\varphi \lhd S_5$ гэдгээс $\ker\varphi = \{e\}$ буюу $S_5$ нь $S_4$-ийн дэд бүлэгтэй изоморф болоход хүрч зөрчил гарав.

**5.** $|G| = 60, n_5 > 1, H \lhd G, \{e\} \neq H \neq G$ гэе. $n_5 = 1 + 5k \mid 60$ гэдгээс $n_5 = 6$ болно.

$$P \in Syl_5(G), |P^G| = |\{P^x \mid x \in G\}| = 6 = [G : N_G(P)]$$

учир $|N_G(P)| = 10$. Хэрэв $5 \mid |H|$ бол $H$ $G$-ийн Силовын 5 дэд бүлгийг ($P$-г) агуулах ба $H \lhd G$ тул $P^G$-г бүгдийг нь агуулна.

Тэгвэл $|H| \geq 1 + 6 \cdot 4 = 25$ буюу $|H| = 30$ гэсэн ганц боломж байна. Гэтэл $H$ нь ганц нормал Силовын 5-дэд бүлэгтэй гэдгийг шууд баталж болох тул ийм байж үл болно.
Хэрэв $|H| = 6 \bigvee 12$ бол $\exists M \lhd H, \quad M$ Силовын дэд бүлэг.

$M \lhd G : x \in G$ бол $M^x \lhd H^x = H$ ба $M$ Силовын ганц дэд бүлэг тул $M^x = M$. Иймд $|H| = 2 \bigvee 3 \bigvee 4$ гэж үзье.
$\overline{G} = G/H, |\overline{G}| = 30, 20, 15$. Аль ч тохиолд $\overline{G}$-д Силовын нормал 5-дэд бүлэг $\overline{P}$ бий. Түүний бүрэн эх бүр $P$ нь $G$-д нормал хуваагч ба $5 \mid |P|$ байх тул эхний тохиолдлоор боломжгүй юм.
Иймд $G$ энгийн бүлэг.